Stundenprotokoll

22. August 2007

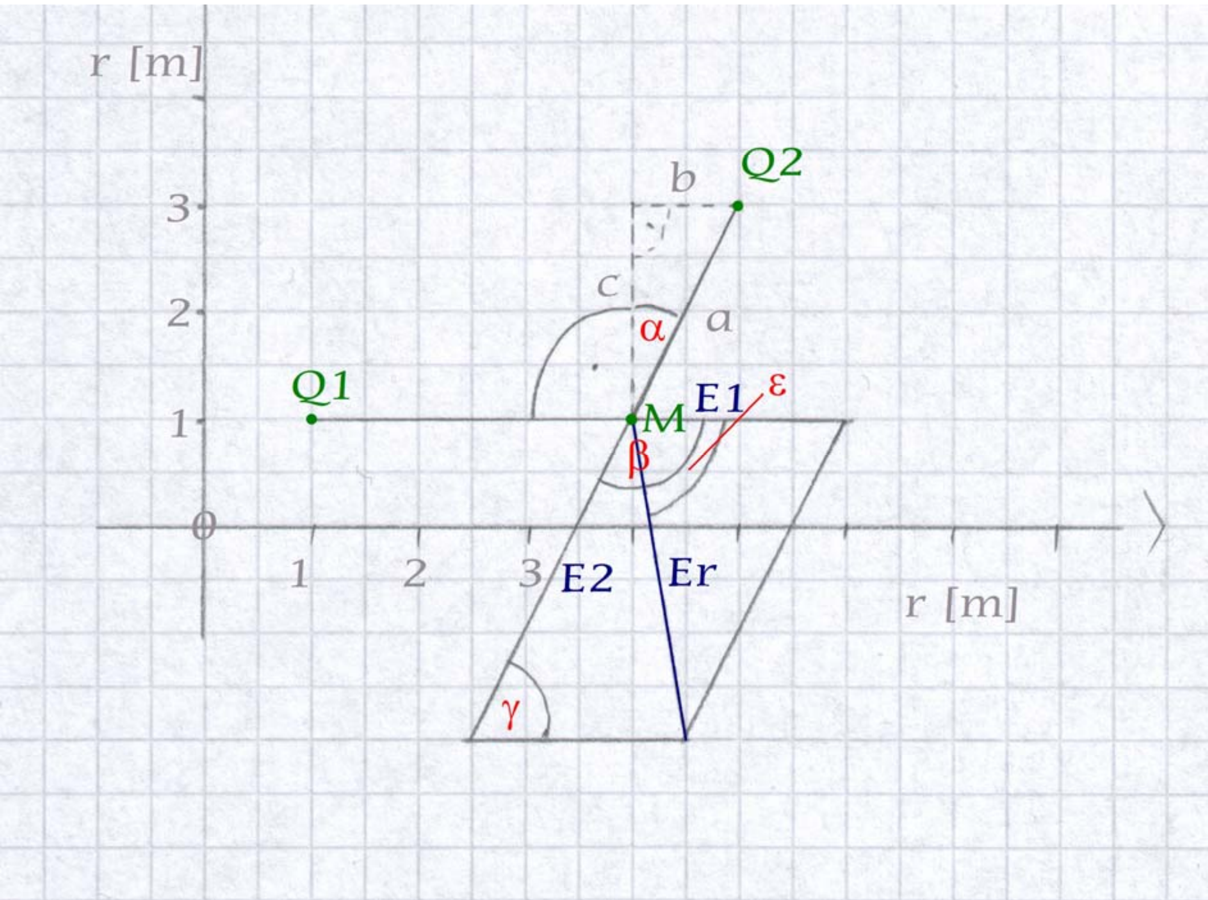
Physik LK Bastgen

Kapazität / Coulomb’sches Gesetz / Ladungen im Koordinatenkreuz

Ladungen im Koordinatenkreuz

Im Unterricht haben wir folgende Aufgabe durch Überlegungen nach und nach gelöst und am Ende zusammengefasst:

Ladung Q_1 = 2C	bei (1m/1m)
Ladung Q_2 = 3C	bei (5m/3m)
Messpunkt M	bei (4m/1m)



Gesucht sind der Betrag und die Richtung des elektrischen Feldes am Messpunkt M.

Zunächst haben wir uns um den Betrag gekümmert, indem wir die jeweilige Stärke der beiden durch Q_1 und Q_2 erzeugten elektrischen Felder am Punkt M berechnet haben:

$$E_1 = c \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = c \cdot \frac{2C}{(3m)^2} \approx c \cdot 0.22 \frac{C}{m^2}$$

$$E_2 = c \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} = c \cdot \frac{3C}{a^2} = c \cdot \frac{3C}{\sqrt{(1m)^2 + (2m)^2}^2} \approx c \cdot 1.34 \frac{C}{m^2}$$

Nun suchen wir den Winkel β, damit wir im Parallelogramm weiterrechnen können. Wie aus der Skizze zu entnehmen kann er folgendermaßen berechnet werden:

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{b}{c}\right) = \arctan\left(\frac{1m}{2m}\right) \approx 26.56°$$

$$\beta = 90° + \alpha$$
$$\Leftrightarrow \beta \approx 90° + 26.56° \approx 116.56°$$

Da wir die Winkelsumme des Parallelogramms kennen (360°) und β haben, berechnen wir nun γ:

$$\gamma = \frac{360° - (2 \cdot \beta)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \gamma \approx 180° - 116.56° \approx 63.44°$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes ist es möglich die dem Winkel γ gegenüberliegende Seite zu berechnen, welche ja den gesuchten resultierenden Betrag E_r des elektrischen Feldes am Punk M darstellt.

In den Kosinussatz müssen die den Winkel einschließenden Seitenlängen eingesetzt werden:

$$E_r^2 = E_1^2 + E_2^2 - E_1 \cdot E_2 \cdot \cos(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow E_r \approx \sqrt{\left(c \cdot 0.22 \frac{C}{m^2}\right)^2 + \left(c \cdot 1.34 \frac{C}{m^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(c \cdot 0.22 \frac{C}{m^2}\right) \cdot \left(c \cdot 1.34 \frac{C}{m^2}\right) \cdot \cos(63.44°)}$$

$$\Leftrightarrow E_r \approx c \cdot \sqrt{1.84 - 0.26} \frac{C}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow E_r \approx c \cdot 1.25 \frac{C}{m^2}$$

Also ist der resultierende Betrag des elektrischen Feldes bei M

$c \cdot 1.25 \frac{C}{m^2}$ groß, wobei wir den konstanten Faktor c noch nicht kennen.

Relativ schnell ist man jetzt in der Lage, die Richtung des Betrages ausgehend von einer horizontalen Linie zu bestimmen. Auch hierfür verwenden wir den Kosinussatz, nur umgekehrt:

$$E_2^{\ 2} = E_r^{\ 2} + E_1^{\ 2} - 2 \cdot E_r \cdot E_1 \cdot \cos(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{E_2^{\ 2} - E_r^{\ 2} - E_1^{\ 2}}{2 \cdot E_r \cdot E_1} = \cos(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \ \cos(\varepsilon) \approx 109.2°$$

Die Konstante c (, die ja „nur“ Streckungsfaktor ist,) haben wir vernachlässigt.

Die Richtung des Vektors ist also um 109,2° aus der Horizontalen im Uhrzeigersinn nach unten rechts gedreht (s. Skizze).

Wir haben schließlich den Vektor des elektrischen Feldes am Punkt M vollständig bestimmt:

Betrag: $c \cdot 1.25 \frac{C}{m^2}$

Richtung: 109,2°, also leicht nach unten rechts zeigend

<u>Wir fassen zusammen:</u>

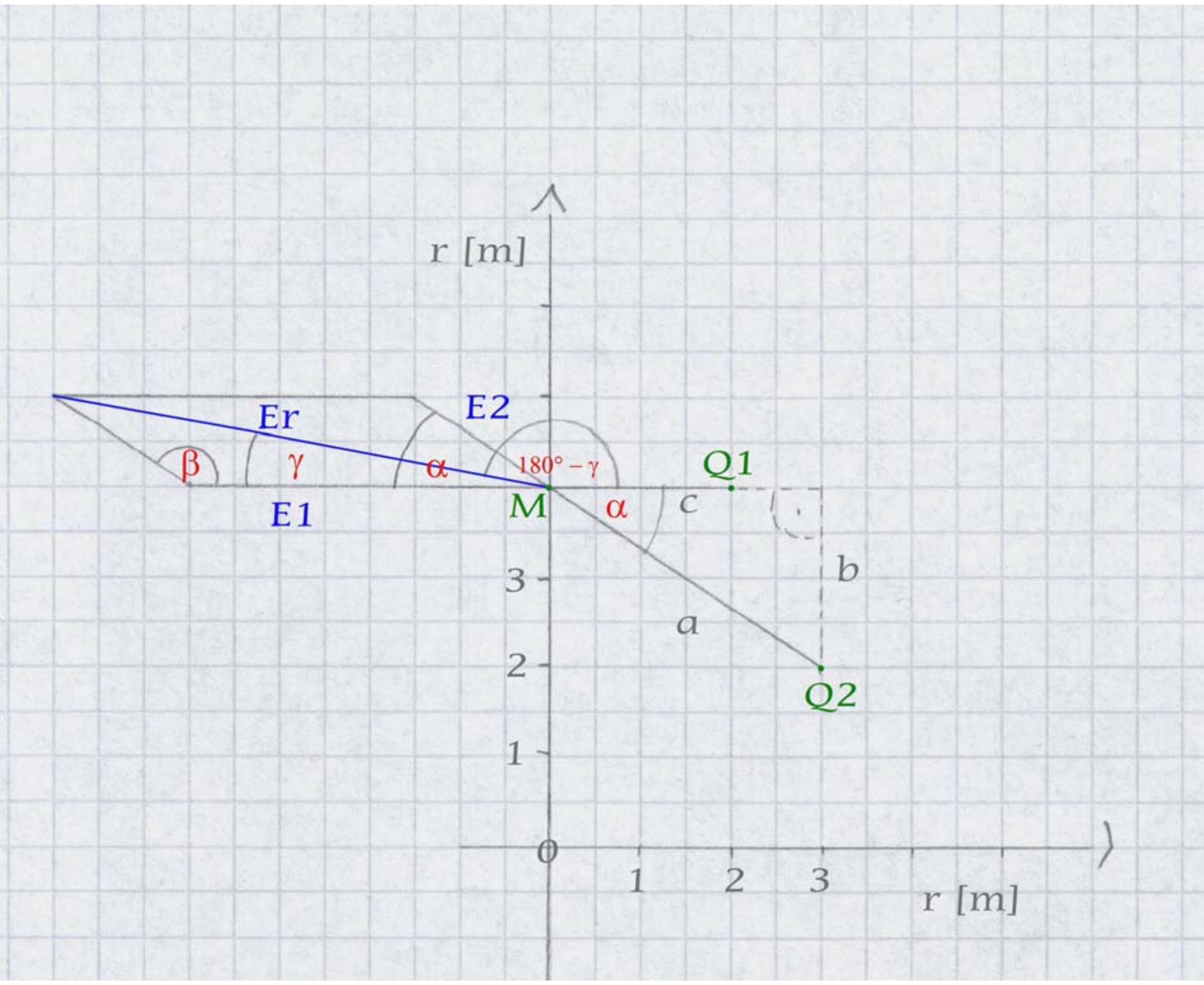
Alle einzelnen elektrischen Felder, die radialsymmetrisch auf einen bestimmten Punkt wirken, addieren sich vektoriell.

Aus allen Einzelbeträgen und –richtungen ergeben sich ein resultierender Betrag und eine resultierende Richtung.

Zeichnerisch kann man den resultierenden Vektor durch Kräfteparallelogramme bestimmen.

Als Hausaufgabe hatten wir nach demselben Muster diese ähnliche Aufgabe zu lösen:

Ladung Q_1 = 2C bei (2m/4m)
Ladung Q_2 = 3C bei (3m/2m)
Messpunkt M bei (0m/4m)



1.) Betrag der elektrischen Felder am Messpunkt M:

$$E_1 = c \cdot \frac{Q_1}{r_1^{\,2}} = c \cdot \frac{2C}{(2m)^2} = c \cdot 0.5\,\frac{C}{m^2}$$

$$E_2 = c \cdot \frac{Q_2}{r_2^{\,2}} = c \cdot \frac{3C}{a^2} = c \cdot \frac{3C}{\sqrt{(3m)^2 + (2m)^2}^{\,2}} \approx c \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{C}{m^2}$$

2.) Winkel β:

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \quad = \arctan\left(\frac{b}{c}\right) = \arctan\left(\frac{2m}{2m}\right) = 45°$$

$$\beta \quad = \frac{360° - (2 \cdot \alpha)}{2}°$$

$$\Leftrightarrow \beta \quad = 180° - 45° = 135°$$

3.) resultierender Betrag des elektrischen Feldes am Punkt M:

$$E_r^{\ 2} = E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} - E_1 \cdot E_2 \cdot \cos(\beta)$$

$$\Leftrightarrow E_r \quad = \sqrt{\left(c \cdot 0.5 \cdot \frac{C}{m^2}\right)^2 + \left(c \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{C}{m^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(c \cdot 0.5 \frac{C}{m^2}\right) \cdot \left(c \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{C}{m^2}\right) \cdot \cos(135°)}$$

$$\Leftrightarrow E_r \quad \approx c \cdot \sqrt{0.4664} \cdot \frac{C}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow E_r \quad \approx c \cdot 0.6829 \cdot \frac{C}{m^2}$$

4.) Winkel des resultierenden Feldes zur Horizontalen:

$$E_2{}^2 = E_r{}^2 + E_1{}^2 - 2 \cdot E_r \cdot E_1 \cdot \cos(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{E_2{}^2 - E_r{}^2 - E_1{}^2}{2 \cdot E_r \cdot E_1} = \cos(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{-0.6631}{0.6829} \approx 0.97 \approx \cos(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \ \arccos(0.97) \approx \gamma$$

$$\Leftrightarrow \ \gamma \approx 14.06°$$

$$180° - 14.06° = 165.94°$$

Auswertung: Der resultierende Vektor des elektrischen Feldes am Punkt M beträgt ca. $c \cdot 0.6829 \cdot \frac{C}{m^2}$ in Richtung 165.95° aus der Horizontalen nach links.

El. Kapazität

Die elektrische Kapazität ist die Fähigkeit eines Gegenstandes Ladung aufzunehmen.

Für eine Kugel, die an Spannung angelegt wurde, und an der dann die Ladung gemessen wird gilt:

Q ~ U, also $\frac{Q}{U} = const$

Die Kapazität C ist folgendermaßen definiert:

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{Q}{U} \\ [C] &= \frac{C}{V} = F \quad (Farad) \end{aligned}}$$

Coulomb'sches Gesetz

E ~ Q (felderzeugende Ladung)

E ~ $\frac{1}{r^2}$ (Abstand)

Also lautet die Definition:

$$\boxed{E = \mathrm{const}\ \frac{Q}{r^2}}$$