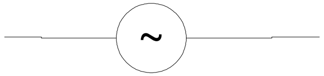
11 – Wechselstromkreise

Bislang haben wir uns nur mit dem Gleichstromkreis (Kapitel 6), sowie dem Einfluss von Kondensator und Induktivität auf die Schaltprozesse in Gleichstromkreisen befasst (Kapitel 10). Nun wollen wir annehmen, dass in unseren Schaltkreisen Wechselspannungsquellen wirken. AC-Schaltkreise sind deshalb von großer Bedeutung, weil jede zeitabhängige Spannung in einem Schaltkreis in eine **Fourierreihe** zerlegt werden kann und deshalb die Wirkung von Widerstand, Kondensator und Induktivität in Gegenwart einer sinusförmigen EMF sehr wichtig ist.

11.1 – Einführung in AC-Kreise

Das Schaltsymbol für eine Wechselspannungsquelle ist

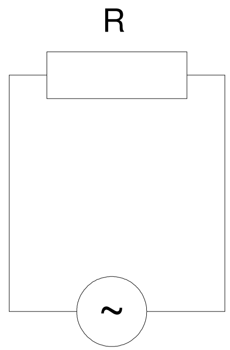


Eine Wechselspannungsquelle erzeugt eine sinusförmige Spannung der Frequenz f. Wir diskutieren nacheinander das Verhalten eines ohmschen Widerstands R, eines Kondensators der Kapazität C und einer Induktivität L in Reihe mit einer Wechselspannungsquelle. Wir gehen dabei jeweils davon aus, dass die Spannungsquelle einen Strom der Form

$$I = I_0 \sin(2\pi f t) = I_0 \sin(\omega t)$$

zur Folge hat.

11.2 – AC-Kreis mit Widerstand R



Wird ein Widerstand in Reihe mit eine AC-Spannungsquelle geschaltet, so oszilliert der Strom mit der angelegten Spannung **in Phase**. Das ergibt sich direkt aus der Anwendung der Kirchhoffschen Maschenregel:

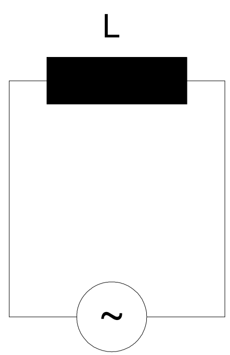
$$V - IR = 0 \qquad \rightarrow \qquad V = I_0 R \sin(\omega t) = V_0 \sin(\omega t)$$

$V_0 = I_0 R$ ist der Maximalwert der Spannung.

Am Widerstand wird im Mittel die folgende Leistung umgesetzt:

$$\bar{P} = \bar{I}\bar{V} = I_{\mathrm{rms}}^2 R = V_{\mathrm{rms}}^2 / R$$

11.3 – AC-Kreis mit Induktivität L



Die an der Induktivität angelegte Spannung wird durch die induzierte EMF gerade aufgehoben. Kirchhoffs Maschenregel liefert:

$$V - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V = L\frac{dI}{dt} = L I_0 \omega \cos(\omega t)$$

Unter Verwendung der Identität cos x = sin(x + 90°) können wir das umschreiben zu

$$V = L I_0 \omega \sin(\omega t + 90°) = V_0 \sin(\omega t + 90°)$$

mit $V_0 = LI_0\omega$, dem Maximalwert der Spannung.

Strom und Spannung an der Induktivität sind also um 90° aus der Phase. Wir merken uns

In einer Induktivität liegt der Strom gegenüber der Spannung um 90° in der Phase zurück.

Diese 90°-Phasenverschiebung impliziert, dass im Mittel keine Umwandlung von elektrischer Energie in andere Enerigformen (insbesondere Wärme) stattfindet, denn es gilt

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t) I(t)\,dt = \frac{1}{T} V_0 I_0 \int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = 0$$

Tatsächlich wird ständig Energie zwischen der Spannungsquelle und dem Magnetfeld in der Induktivität hin und her oszilliert. Beim ohmschen Widerstand hingegen sind Strom und Spannung in Phase und es wird ständig elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt.

Die Wirkung der Induktivität im AC-Kreis ist eine den Strom dämpfende aufgrund der ihr erzeugten Gegen-EMF. Das ist analog zur strombegrenzenden Wirkung eines Widerstands im DC-Kreis für den ja bekanntlich gilt: $V_0 = I_0R$.
Diese Analogie kann durch Übernahme einer derartigen Relation für die Induktivität im AC-Kreis formuliert werden:

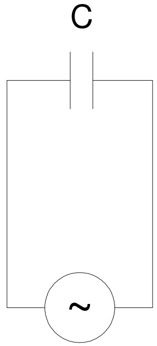
$$V_0 = I_0 \chi_L$$

mit der **induktiven Reaktanz** oder **Impedanz**

$$\chi_L = \omega L$$

Die induktive Reaktanz hat – wie auch der ohmsche Widerstand – die Einheit Ohm.
Um Verwirrungen mit der Namensgebung zu vermeiden, verwenden wir den Begriff Reaktanz für die rein induktive Komponente einer Spule, während ihre Impedanz auch ihren ohmschen Widerstandsanteil einschließt.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Beziehung $V_0 = I_0\chi_L$ nicht zu einem beliebigen Zeitpunkt gültig ist, da ja Strom und Spannung nicht zur gleichen Zeit ihren Maximalwert erreichen.



Wir haben schon gesehen, dass ein Kondensator, sobald er aufgeladen ist, in einem DC-Kreis jeden weiteren Stromfluss unterbindet. Ist er aber mit einer AC-Spannungsquelle verbunden, so wird er periodisch ge- und entladen. Es ist dann ständig ein AC-Strom vorhanden.

Wir wenden wieder Kirchhoffs Maschenregel an:

$$V = \frac{Q}{C}$$

Q ist die Ladung auf den Kondensatorplatten. Für den Strom I gilt zu jeder Zeit

$$I = \frac{dQ}{dt} = I_0 \sin(\omega t)$$

Wir können also durch Integration Q(t) ermitteln zu

$$Q(t) - Q(t=0) = \int_0^t I_0 \sin(\omega t')\, dt' = -\frac{I_0}{\omega}\left(\cos(\omega t) - 1\right)$$

Mit $Q(0) = I_0/\omega$ demnach also

$$Q(t) = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t)$$

Die Spannung über den Kondensator ist

$$V=\frac{Q}{C}=-I_0\left(\frac{1}{\omega C}\right)\cos(\omega t)$$

Mit der trigonometrischen Beziehung cos x = -sin(x – 90°) können wir das umschreiben zu

$$V=I_0\left(\frac{1}{\omega C}\right)\sin(\omega t-90°)$$

Mit $V_0 = I_0 \cdot 1/\omega C$, der Maximalspannung.
Wieder sind Strom und Spannung um 90° ausser Phase. Allerdings gilt nun

An einem Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° in der Phase voraus.

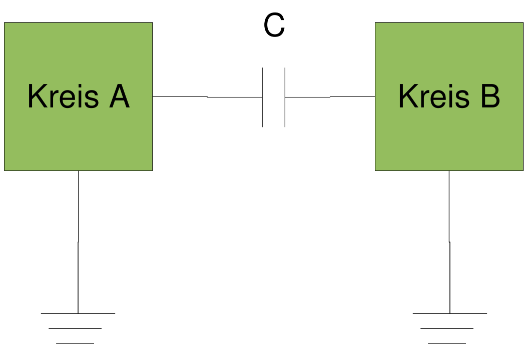
Auch in diesem Fall wird im Mittel keine Leistung umgesetzt. Die Energie der Spannungsquelle wird periodisch in das elektrische Feld des Kondensators “hinein- und herausgepumpt”.
In Analogie zur Induktivität wird eine **kapazitive Reaktanz χ_C** eingeführt

$$V_0=I_0\chi_C\ ,\ \chi_C=\frac{1}{\omega C}$$

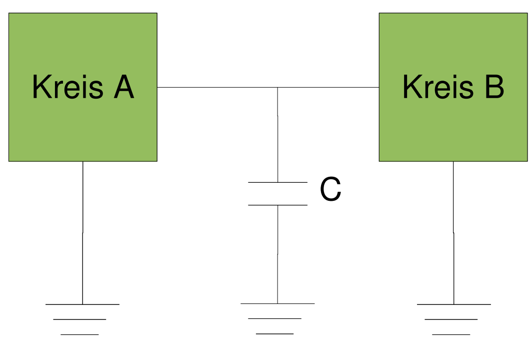
Die kapazitive Reaktanz verknüpft wieder die Maximalwerte von Strom und Spannung, ist aber nicht zu einem beliebigen Zeitpunkt gültig wegen der Phasenverschiebung von Spannung und Strom.

Für $\omega \to 0$ geht die kapazitive Reaktanz gegen unendlich. Das drückt das Sperrverhalten des Kondensators im Gleichstromkreis aus.

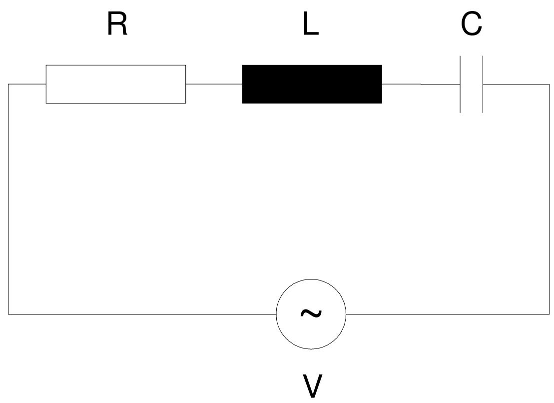
Kondensatoren werden, neben den schon vorher diskutierten Anwendungen, auch als Filterelemente zwischen zwei Schaltkreisen verwendet. Derart kapazitiv gekoppelte Schaltkreise sind gegenüber DC-Spannung quasi entkoppelt. AC-Spannungen aber können weitgehend ungehindert zwischen ihnen übertragen werden.



Zwischen Kreis A und B kann keine DC-Spannung aufgebaut werden. AC-Spannungen können, bei ausreichend großem C, ungehindert passieren. Der Kondensator wirkt als ein **Filter** gegen DC-Spannungen.



Zwischen Kreis A und B kann eine DC-Spannung aufgebaut werden. Wenn C groß ist, bietet der Kondensator wenig Widerstand gegen eine AC-Spannung. Der Strom fließt gegen Masse ab, statt nach B zu gelangen. Der Kondensator wirkt also als ein **Filter** gegen AC-Spannungen, wenn eine möglichst gut DC-Spannung in B benötigt wird.



Wir betrachten nun einen Serienkreis, der einen Widerstand, eine Induktivität und einen Kondensator enthält. Setzen wir L=0 oder R=0 oder C=∞, so können wir die folgenden Ergebnisse natürlich auch auf den Serienkreis mit zwei Komponenten anwenden.

Mit V_R, V_L, V_C bezeichnen wir die instantanen Spannungsabfälle über dem Widerstand, der Induktivität oder dem Kondensator, mit V_{R0}, V_{L0}, V_{C0} ihre jeweiligen Maximalwerte. Die Phasenrelationen der einzelnen Spannungen bzgl. des im Kreis fließenden Stromes haben wir in den vorherigen Abschnitten schon ermittelt. V_R wird mit dem Strom in Phase sein, V_L wird dem Strom um 90° vorauseilen, V_C wird um 90° hinter dem Strom zurückbleiben.
Zu jeder Zeit gilt Kirchhoffs Maschenregel

$$V = V_R + V_L + V_C$$

Wegen der jeweiligen Phasenverschiebungen werden die Maximalwerte der Einzelspannungen nicht zu gleichen Zeiten erreicht. Der Maximalwert der Spannungsquelle V_0 ist also <u>nicht</u> durch die Summe V_{R0} + V_{L0} + V_{C0} gegeben!

Wir wollen nun bestimmen, welche Impedanz dieser Serienkreis hat und welcher Maximalwert des Stromes I_0 auftritt. Ausserdem wollen wir wissen, welche Phasenbeziehung zwischen der Quellenspannung und dem Strom besteht.

Zunächst halten wir fest: Zu jeder Zeit muss der Strom an allen Punkten des Stromkreises der gleiche sein. Wir wählen o.B.d.A.

$$I = I_0 \sin(\omega t)$$

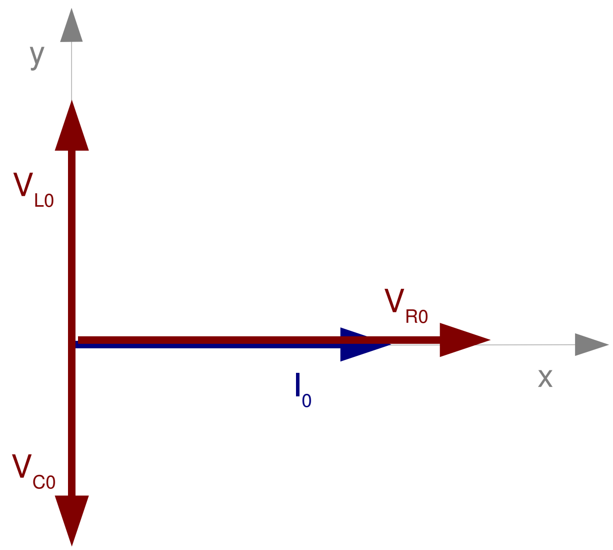
Wir diskutieren den Stromkreis unter Verwendung von **Zeigerdiagrammen**. Dazu zeichen wir Pfeile in einer Ebene (xy-Ebene). Diese repräsentieren die Spannungen über ihre Länge und deren Phasenlage bzgl. des Stromes über ihren Drehwinkel gegenüber dem Stromzeiger. Die Länge der Zeiger ist gegeben durch

$$V_{R0} = I_0 R \ , \ V_{L0} = I_0 \chi_L \ , \ V_{C0} = I_0 \chi_C$$

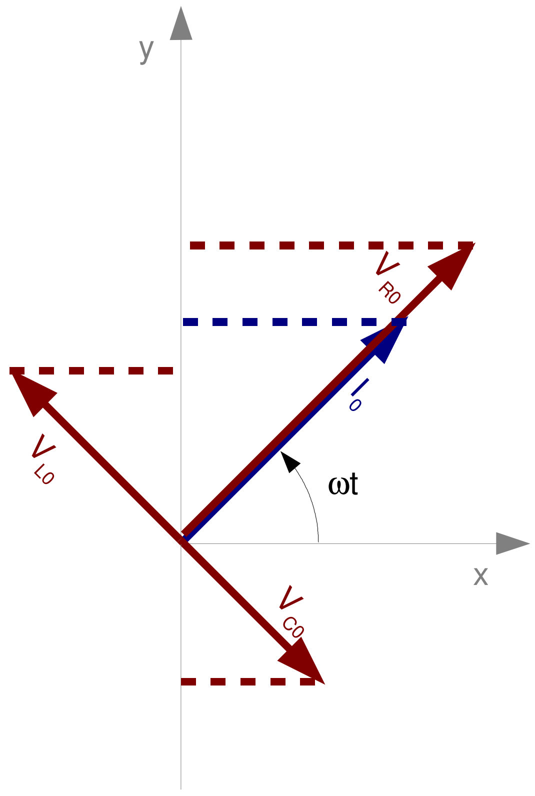
Alle Zeiger rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Spannungsabfälle zu einer gegebenen Zeit erhalten wir durch **Projektion der Zeiger auf die y-Achse (unsere Konvention)**.

Wir könnten auch den Serienkreis durch Lösen der über die Maschenregel implizierten Differentialgleichung (bspw. für Q(t)) analysieren. Zeigerdiagramme sind aber sehr viel leichter anzuwenden und geben gleichzeitig eine sehr anschauliche Darstellung der zeitabhängigen Prozesse.

Wir zeichnen zunächst die Situation bei t = 0.



Wir lassen das Zeigerdiagramm nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotieren und erhalten das folgende Diagramm:

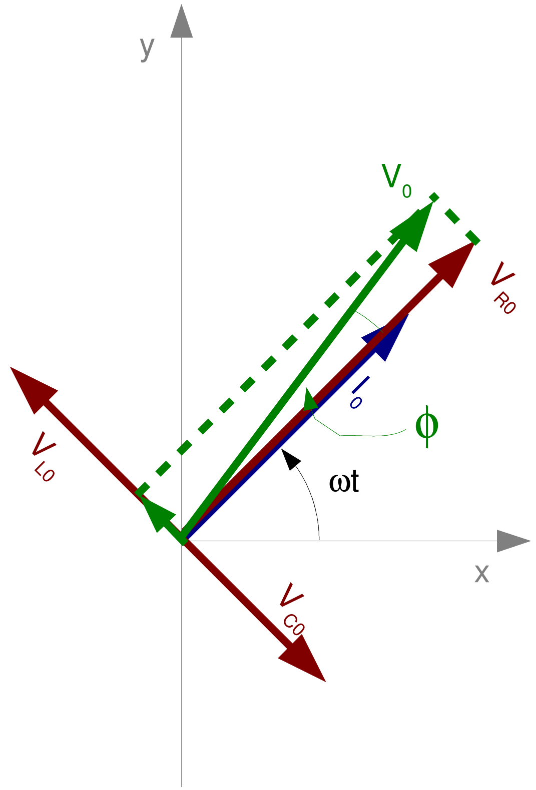


Die jeweiligen Projektionen der Spannungen und des Stromes auf die y-Achse liefern die **Momentanwerte** zum Zeitpunkt t.
Bspw. ist die an der Induktivität abfallende Spannung demnach gegeben durch

$$V_L(t)=V_{L0}\cos(\omega t)=V_{L0}\sin(\omega t+90°)$$

Offensichtlich liefert das Zeigerdiagramm bzgl. der Phasenlage zu einer beliebigen Zeit die gleichen Ergebnisse, wie unsere Analyse der Differentialgleichungen in den Abschnitten 11.2-11.4. Wie aber sind die Spannungen zu addieren?

- Wir notieren zunächst, dass die Summe der Projektionen der Vektoren auf die y-Achse gleich der Projektion ihrer Summe. Die Summe der Vektoren ist aber gleich der Quellenspannung. Wir können also die Vektorsumme dem Maximalwert der Quellenspannung V_0 in unserem Zeigerdiagramm gleichsetzen.



Wir erkennen unmittelbar, dass zwischen V(t) und I(t) eine feste Phasenverschiebung ϕ auftritt

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Wir können weitere Schlussfolgerungen ziehen. So ist die Gesamtimpedanz Z des Serienkreises

$$V_{\mathrm{rms}} = I_{\mathrm{rms}} Z \text{ oder } V_0 = I_0 Z$$

gegeben durch

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2}$$

Wir formen ein wenig um und erhalten

$$V_0 = \sqrt{I_0^2 R^2 + (I_0 \chi_L - I_0 \chi_C)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}$$

Daraus können wir die Impedanz Z = V_0/I_0 ablesen als

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Auch den Phasenwinkel ϕ können wir aus dem Zeigerdiagramm ablesen:

$$\tan(\phi) = \frac{V_{L0} - V_{C0}}{V_{R0}} = \frac{I_0(\chi_L - \chi_C)}{I_0 R} = \frac{\chi_L - \chi_C}{R}$$

oder auch

$$\cos(\phi) = \frac{V_{R0}}{V_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}$$

Schließlich können wir auch noch die im Kreise dissipierte Leistung ermitteln. Wir hatten schon gesehen, dass nur am ohmschen Widerstand Leistung umgesetzt wird. Die mittlere umgesetzte Leistung ist also

$$\bar{P} = I_{\mathrm{rms}}^2 R = I_{\mathrm{rms}}^2 Z \cos(\phi) = I_{\mathrm{rms}} V_{\mathrm{rms}} \cos(\phi)$$

Der Faktor **cosϕ** wird deshalb auch als **Leistungsfaktor** bezeichnet.

Anmerkung zur Bezeichnungsweise:
Der ohmsche Widerstandsanteil an Z, der Widerstandsteil also, an dem Leistung dissipiert wird, wird auch als **Wirkwiderstand** bezeichnet. Die Widerstandsanteile, die keine Leistung dissipieren, heissen **Blindwiderstand**. Die Gesamtimpedanz Z wird schließlich auch als **Scheinwiderstand** bezeichnet. Analoges gilt für die Leistungen im AC-Kreis. Man unterscheidet die Wirkleistung (s.o.), die Blindleistung ($= I_{rms} V_{rms} \sin\phi$) und die Scheinleistung ($= I_{rms} V_{rms}$).

Anmerkung zu alternativer Darstellung mittels komplexer Zahlen:
Es existiert ein Isomorphismus zwischen zweidimensionalen, reellen Vektorräumen und dem Raum der komplexen Zahlen. Analog zum Zeigerdiagramm ist deshalb die Rechnung mit komplexen Wechselstromwiderständen, wie $\chi_L = i\omega C$, und komplexwertigen Spannungen und Strömen, deren Realteil jeweils den Momentanwert von Spannung und Strom repräsentieren. Dazu in der Übung mehr.

Der rms-Strom im LRC-Kreis ist nach 11.5 gegeben durch

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Die Impedanz von Spule und Kondensator hängen von der Frequenz ab, deshalb muss das im Wechselstromkreis auch für den Strom gelten.
Aus der Gleichung können wir ablesen, dass der Strom maximal werden wird, wenn gilt:

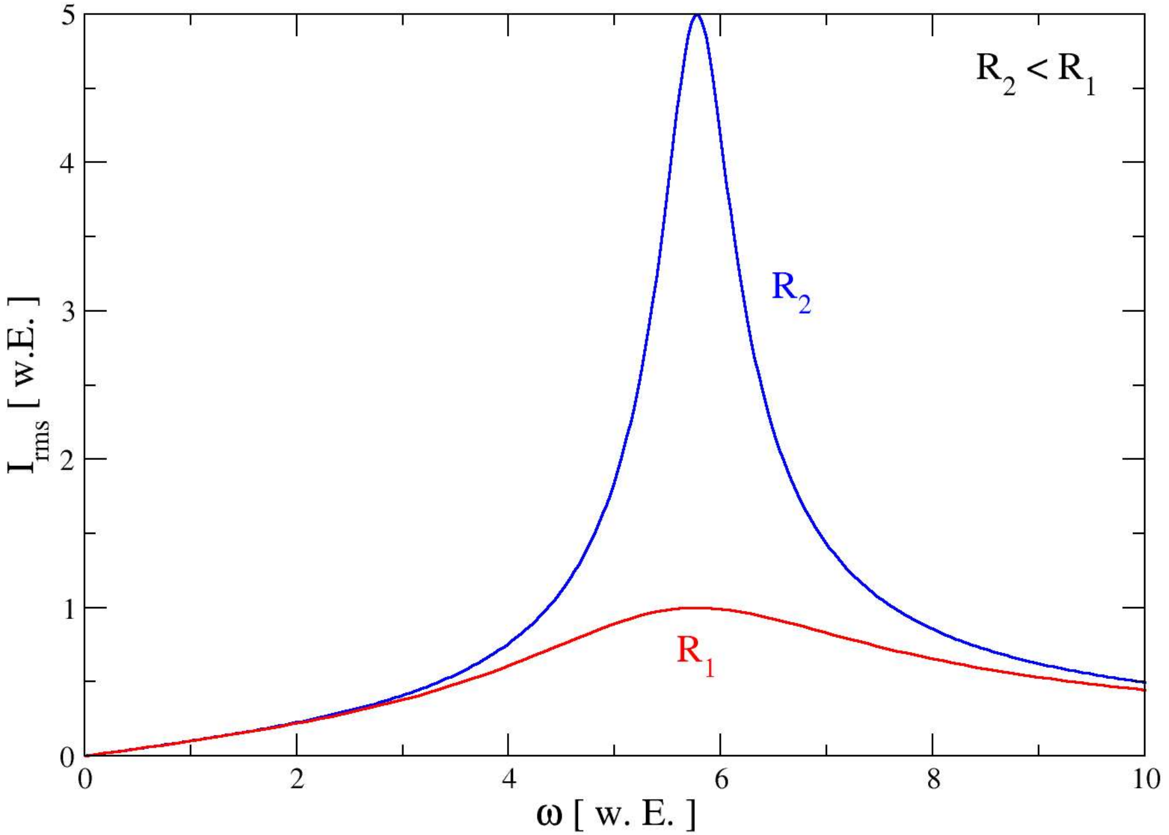
$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$$

Wir lösen nach ω auf und erhalten die Lösung:

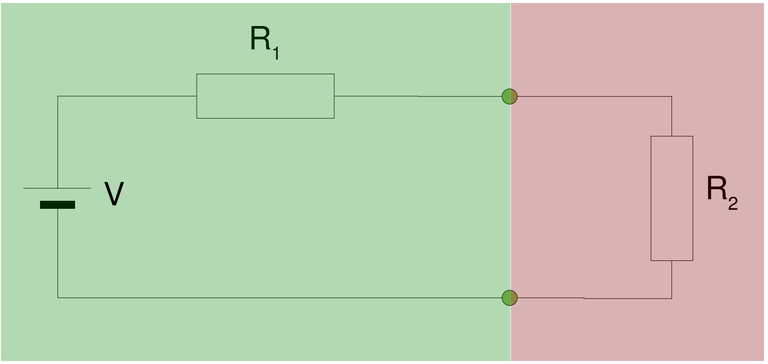
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Für $\omega = \omega_0$ ist der Kreis in **Resonanz**. ω_0 definiert die **Resonanzfrequenz**.

Diese Resonanz ist in völlig analog zur mechanischen Resonanz. So ist in Resonanz die in das System transferierte Leistung maximal. Wir erkennen das daran, dass in diesem Fall der Leistungsfaktor $\cos\phi = 1$ wird, da sich induktive und kapazitive Reaktanz gerade aufheben. Elektrische Resonanz wird bspw. für die Sendereinstellung bei Radios oder Fernsehapparaten verwendet. Zwar gelangt eine ganze Bandbreite von Signalen mit verschiedenen Frequenzen über die Antenne in das Gerät, aber nur die in Resonanz mit dem (gedämpften) Schwingkreis werden mit signifikanter Stromamplitude übertragen.



Oftmals wird ein Schaltkreis mit einem weiteren Schaltkreis verbunden. So ist die Fernsehantenne mit dem Eingangsverstärker des Fernsehers verbunden, dieser wiederum mit einem Demodulator usw.. Dabei ist es fast immer nötig, darauf zu achten, dass die maximal mögliche Leistung zwischen den Schaltkreisen übertragen wird. Dies setzt voraus, dass die Ausgangsimpedanz des einen Schaltkreises mit der Eingangsimpedanz des anderen Schaltkreises abgeglichen wird. Wir betrachten dies an einem sehr einfachen Beispiel:



Schaltkreis 1 sei durch eine Spannungsquelle und einen Widerstand R_1 charakterisiert. Dies könnte bpsw. für ein Labornetzgerät stehen. R_1 ist möge auch den Innenwiderstand der Spannungsquelle enthalten. R_1 ist die **Ausgangsimpedanz** von Kreis 1.

In Kreis 2, der sehr kompliziert sein mag, stellt R_2 die äquivalente **Eingangsimpedanz** dar. Die von 1 nach 2 transferierte Leistung ist gegeben durch

$$P = I^2 R_2 = \left(\frac{V}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2$$

Wir teilen Zähler und Nenner durch R_1^2 und erhalten

$$P = \frac{V^2}{R_1} \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

Für welches Verhältnis $x = R_2/R_1$ wird P maximal? - Wir differenzieren nach x und setzen gleich 0:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{V^2}{R_1}\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3}\right) = \frac{V^2}{R_1}\frac{1-x}{(1+x)^3} = 0$$

D.h. wir haben eine maximal Leistungsübertragung für x = 1 bzw. $R_2 = R_1$. Wir haben in diesem Fall eine perfekte **Impedanzanpassung**.

Im Wechselstromkreis kann die Analyse erheblich komplizierter sein. Es ergibt sich aber das gleiche Ergebnis für die Gesamtimpedanzen der beiden Schaltkreise:

Eine Impedanzanpassung erfordert, dass $Z_2 = Z_1$ gilt.

Es ist wichtig, auch bei der Durchführung von Messungen in Wechselstromkreisen, auf die Impedanzanpassung zu achten. Die zu messenden Signale können sonst erheblich verzerrt werden. Völlig unsinnige Messergebnisse können auftreten. Dies hat schon mehr als einmal zu scheinbar “neuartigen” physikalischen Effekten (mit entsprechender Publikation!) geführt – recht peinlich für die beiteiligten Autoren.

In manchen Fällen kann eine Impedanzanpassung durch Zwischenschalten eines Transformators erreicht werden. Wenn Z_S die Sekundärimpedanz ist und Z_P die Primärimpedanz, dann gilt

$$V_S = Z_S I_S \text{ und } V_P = Z_P I_P$$

Demnach also auch

$$\frac{Z_P}{Z_S} = \frac{V_P I_S}{V_S I_P} = \left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2$$

Durch entsprechende Wahl der Wicklungszahlen ist also eine Impedanzänderung mit dem Transformator verbunden und eine Impedanzanpassung zwischen zwei Schaltkreisen möglich.

Manche Messgeräte, wie bspw. ein Oszilloskop, benötigen keinen hohen Leistungsübertrag. Ihr Eingangswiderstand ist deshalb sehr hoch. Dies hat den Vorteil, dass das Instrument wenig Leistung aus dem zu messenden Kreis abzieht und so diesen Kreis möglichst wenig stört.

Hochspannungsleitungen haben in der Regel 4 Leitungen und nicht etwa 2, was wohl naheliegend wäre. Eine dieser Leitungen ist der 0-Leiter (= Masse). Die verbleibenden drei übertragen Dreiphasenstrom, der von aus der Überlagung dreier um jeweils 120° gegeneinander phasenverschobenen Spannungen getrieben wird

$$V_1 = V_0 \sin(\omega t)$$
$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$
$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

Der Grund für die Verwendung von Dreiphasenstrom ist die, im Gegensatz zu Einphasenstrom, glattere Leistungsübertragung. Wenn bspw. jeder der drei Phasen mit einem Widerstand R verbunden ist, so wird die folgende Leistung übertragen:

$$P = \frac{1}{R}\left(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2\right)$$

Einsetzen der drei obigen Gleichungen und ein wenig Algebra ergibt, dass diese Leistung nicht von der Zeit abhängt:

$$P = \frac{3V_0^2}{2R}$$