# Crash-Kurs Komplexe Zahlen

## 1 Definitionen: $j$, $\mathbb{C}$, $z$

Im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besitzt die lineare Gleichung $ax + b = 0$ $(a, b \varepsilon R; a \neq 0)$ stets eine Lösung. Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ führt zu der Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4c} \tag{1}$$

Dieser Term liefert nur dann ein reelles Ergebnis, wenn $b^2 - 4a \geq 0$ ist. Z.B. hat die Gleichung

$$x^2 + 10x + 34 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-9} \tag{2}$$

keine reelle Lösung.
Wir haben schon einmal eine ähnliche Erfahrung gemacht: $x + a = 0$ liefert in der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auch keine Lösung. Die Erweiterung zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen macht die Gleichung lösbar.
Es stellt sich also die Frage, ob man die Menge $\mathbb{R}$ so erweitern kann, dass alle Quadratischen Gleichungen lösbar sind.
Wir führen eine neue „Zahl" $j$ ein [1] , die die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = -1$ sein soll, also:

$$j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1} \tag{3}$$

$j$ wird auch als imaginäre Einheit bezeichnet.
Damit lässt sich die Lösung aus Gleichung (2) so schreiben:

$$x^2 + 10x + 34 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm 3j \tag{4}$$

Zahlen der Form $z = a + bj$ bezeichnen wir als komplexe Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$. Es ist üblich, für komplexe Zahlen den Buchstaben $z$ zu benutzen. a heißt Realteil ($\Re(z)$) von z; b Imaginärteil ($\Im(z)$) von z.

[1] In der Mathematik benutzt man meist $i$; um Verwechslungsmöglichkeiten mit der Stromstärke vorzubeugen, schließe ich mich der in der Physik und Elektrotechnik verbreiteten Schreibweise an.

# 2 Die Grundrechenarten in $\mathbb{C}$

Mit dem Symbol $j$ kann man rechnen wie mit anderen Bezeichnern. Bei Zusammenfassungen ist zu berücksichtigen, dass $j^2 = -1$ ist.
Im folgenden gelte als vereinbart:

$$z_1 = a_1 + jb_1; z_2 = a_2 + jb_2 \quad usw. \tag{5}$$

## 2.1 Addition

$$z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 \Rightarrow \tag{6}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)} \tag{7}$$

## 2.2 Subtraktion

$$z_1 - z_2 = a_1 + jb_1(a_2 + jb_2) \Rightarrow \tag{8}$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)} \tag{9}$$

## 2.3 Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) && (10)\\ &= a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 && (11)\\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \Rightarrow && (12) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)} \tag{13}$$

## 2.4 konjugiert komplexe Zahlen

Die Zahl $\bar{z}_1 = a_1 - jb_1$ wird als die zu $z_1$ konjugierte komplexe Zahl bezeichnet. Es ist:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_1 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_1 - jb_1) && (14)\\ &= a_1^2 - j^2b_1^2 = a_1^2 + b_1^2 && (15) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2} \tag{16}$$

## 2.5 Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \tag{17}$$

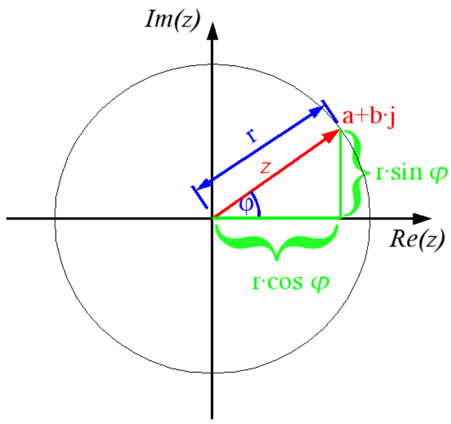
$$= \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \tag{18}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}} \tag{19}$$

# 3 Geometrische Deutung komplexer Zahlen

## 3.1 Die Gaußsche Zahlenebene

Reelle Zahlen lassen sich - da eine Ordnungsrelation existiert - auf der Zahlengeraden anordnen. Für komplexe Zahlen existiert keine Ordnungsrelation, wohl aber für die jeweiligen Komponenten. Man kann sie als ein geordnetes Paar reeller Zahlen (a;b) bzw. $(\Re(z); \Im(z))$ auffassen und als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen.




Wenn wir uns die obigen Ausführungen zur Addition (2.1) und Subtraktion (2.2) noch einmal ansehen, stellen wir fest, dass sich die komplexen Zahlen in dieser Hinsicht wie Vektoren verhalten.
Entsprechend definieren wir den Betrag von z als die Länge des zugehörigen Vektors und schreiben dafür $|z|$.
Es gilt dann;

$$|z| = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{20}$$

## 3.2 Die Polarform der komplexen Zahlen

Punkte der Ebene lassen sich nicht nur mit kartesischen, sondern auch mit Polarkoordinaten beschreiben:
1. *Betrag* $r = |z|$ ist der Abstand des Punktes von Koordinatenursprung
2. *Argument* $\varphi$ ist der Drehwinkel des Zeigers zu $z$aus der Achse der positiven reellen Zahlen gegen den Uhrzeigersinn heraus.
Mit

$$a + bj = \sqrt{a^2 + b^2}\left(cos\left(arctan(\frac{b}{a})\right) + j \cdot sin\left(arctan(\frac{b}{a})\right)\right) \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

lassen sich komplexe Zahlen so darstellen:

$$\boxed{z = a + bj = |z|(cos\varphi + j\ sin\varphi)} \tag{23}$$

Die Summe $(cos\varphi + j \cdot sin\varphi)$ wird im folgeden häufig auftauchen. Zur Vereinfachung vereinbaren wir folgende Schreibweise:

$$\boxed{E(\varphi) = (cos\varphi + j \cdot sin\varphi)} \tag{24}$$

Dann ist

$$\boxed{z = |z|E(\varphi)} \tag{25}$$

die sogenannte *Polarform* der der komplexen Zahl. Die *Normalform* $z = a + j \cdot b$ und die Normalform $|z|E(\varphi)$ sind zwei gleichberechtigte Darstellungen.

### 3.3 Eigenschaften von $E(\varphi)$

Die Zahl $E(\varphi)$ ist für alle reellen Werte $\varphi$ definiert. Weiter ist sie periodisch mit der Periode $2\pi$:

$$E(\varphi + k \cdot 2\pi) = E(\varphi); \quad k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathbb{R} \tag{26}$$

Interessanter wird es, wenn man einmal das Ergebnis einer Multiplikation betrachtet:

$$E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) \tag{27}$$
$$= (cos\varphi_1 + j sin\varphi_1) \cdot (cos\varphi_2 + j sin\varphi_2) \tag{28}$$
$$= (cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 + j^2 sin\varphi_1 \cdot sin\varphi_2) + j(cos\varphi_1 \cdot sin\varphi_2 + sin\varphi_1 \cdot cos\varphi_2) \tag{29}$$
$$= (cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 - sin\varphi_1 \cdot sin\varphi_2) + j(cos\varphi_1 \cdot sin\varphi_2 + sin\varphi_1 \cdot cos\varphi_2) \tag{30}$$

Mit den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen [2] $folgt$ :
Damit gilt:

$$\boxed{E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{31}$$

setzt man insbesondere $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi$ so erhalten wir:

$$\boxed{E(\varphi) \cdot E(-\varphi) = E(\varphi - \varphi) = E(0) = 1} \tag{32}$$

d.h. $E(-\varphi)$ ist zu $E(\varphi)$ reziprok :

$$\boxed{\tfrac{1}{E(\varphi)} = E^{-1}(\varphi) = E(-\varphi)} \tag{33}$$

Damit lässt sich auch die Division ganz einfach darstellen:

$$\frac{E(\varphi_1)}{E(\varphi_2)} = E(\varphi_1) \cdot \frac{1}{E(\varphi_2)} = E(\varphi_1) \cdot E(-\varphi_2) = E(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{34}$$

also :

$$\boxed{\tfrac{E(\varphi_1)}{E(\varphi_2)} = E(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{35}$$

Ist nun in Gleichung (31) $\varphi_1 = \varphi_1 = \varphi$, so erhalten wir :
$[E(\varphi)]^2 = E(\varphi) \cdot E(\varphi) = E(\varphi + \varphi) = E(2\varphi)$,
bzw. analog dazu allgemein :

$$\boxed{E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi)])} \tag{36}$$

[2] siehe Mathematik-Formelsammlung:
$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$
$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$

### 3.4 $E(\varphi) = e^{i\varphi}$

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes lassen eine Verwandtschaft der Funktion $E(\varphi)$ mit der Exponentialfunktion naheliegen.
Ein vollständiger Nachweis ist (m.W.) nur über Reihenentwicklungen möglich. Dies Thema werde ich hier - im Rahmen eines Crash-Kurses - nicht vertiefen.
Zeigen will ich noch, dass sich die Ableitungsregeln sinnvoll übertragen lassen:

$$\frac{dE(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d(cos\varphi + j \cdot sin\varphi)}{d\varphi} = -sin\varphi + jcos\varphi = j(cos\varphi + j \cdot sin\varphi) = j \cdot E(\varphi) \tag{37}$$

Mit diesem Ergebnis erscheint es sinnvoll, festzustellen:

$$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + j \cdot sin\varphi} \tag{38}$$

### 3.5 Die „schönste “mathematische Gleichung

Setzen wir in der letzten Gleichung (38) $\varphi = \pi$, so erhalten wir:

$$e^{i\pi} = cos\pi + j \cdot sin\pi = -1 + j \cdot 0 = -1 \tag{39}$$

Wenn wir diese Beziehung etwas umschreiben, erhalten wir eine Gleichung, die von vielen als die schönste mathematische Gleichung angesehen wird, denn sie enthält:

- die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik: $0, 1, \pi, e, j$
- die drei wichtigsten Operatoren der Mathematik : $+, \cdot, \bigwedge$
- den wichtigsten Vergleichsoperator der Mathematik : $=$

und sonst kein weiteres Symbol.

$$\boxed{\boxed{e^{i \cdot \pi} + 1 = 0}} \tag{40}$$