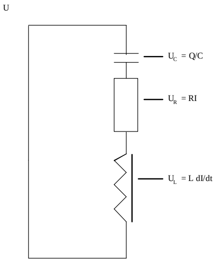
Der Serienresonanzkreis



Nach dem Kirchhoffschen Gesetz muß die Summe der Einzelspannungen gleich der gesamten anliegenden Spannung sein:
$U_L + U_R + U_C = 0$
$L\, dI/dt + RI + q/C = 0$

oder nach t differenziert: $\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$

Der Ansatz $I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$ führt zu der charakteristischen Gleichung für die Frequenz

$$\omega^2 - \hat{i}\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$ mit der Lösung

$$\omega = \hat{i}\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$ bzw

$$\omega = \hat{i}\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \hat{i}\delta \pm \sqrt{\omega_o^{\,2} - \delta^2}$$

Hieraus liest man ab, daß der Schwingkreis die Eigenfrequenz $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ besitzt. Die Dämpfung ist zum ohmschen Widerstand R direkt und zur Induktivität L umgekehrt proportional. Damit entspricht die Induktivität im Schwingkreis der Masse (Trägheit) bei der Federschwingung.

Insgesamt erhält man als Lösung der Differentialgleichung für den Schwingfall:

$$I(t) = I_o \cdot e^{\hat{i}\left(\hat{i}\delta \pm \sqrt{\omega_o^{\,2} - \delta^2}\right)t} = I_o \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{\hat{i}\sqrt{\omega_o^{\,2} - \delta^2}\,t}$$

Physikalisch relevant ist der Realteil der Lösung:

$$I(t) = I_o \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\sqrt{\omega_o^{\,2} - \delta^2}\,t)$$

Für die anliegenden Spannungen erhält man bei vernachlässigtem ohmschen Widerstand:

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{\int I\, dt}{C} = \frac{I_o}{\omega_o C}\sin(\omega_o t)$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega_o L I_o \sin(\omega_o t)$$

Daraus erkennt man, daß die Spannung an der Spule dem Strom um eine Viertelperiode vorauseilt, bzw. die Spannung am Kondensator dem Strom um eine Viertelperiode nachhinkt (Der Strom hat zum Zeitpunkt t=0 schon den Maximalwert erreicht, wahrend die Spannung ihren Maximalwert erst nach T/4 erreicht).
Im Extremfall besteht ein Schwingkreis nur noch aus einer einzigen Drahtschleife, dessen Eigenfrequenz dann ca 10Ghz beträgt.

Legt man nun eine Wechselspannung mit der Frequenz ω an, so erhält man ebenfalls nach Kirchhoff:

Physik	Schwingungen	Klasse	Schwingkreis

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = U_o\, e^{\hat{i}\omega t}$$

und mit dem Ansatz $I(t) = I_o e^{\hat{i}(\omega t - \varphi)}$ nach Differenzieren nach t und Dividieren durch L

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \hat{i}\,\frac{\omega}{L}U_o\, e^{\hat{i}\omega t}$$ Einsetzen von I liefert dann nach Kürzen durch $e^{\hat{i}\omega t}$

$$-\omega^2 I_o\, e^{-\hat{i}\varphi} + \hat{i}\,\omega\frac{R}{L}I_o e^{-\hat{i}\varphi} + \frac{1}{LC}I_o\, e^{-\hat{i}\varphi} = \hat{i}\,\frac{\omega}{L}U_o$$

also erhält man für die maximale Amplitude des Stromes

$$I_o = U_o\,\frac{\hat{i}\,\omega/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \hat{i}\,\omega\frac{R}{L}}e^{\hat{i}\varphi} = U_o\,\frac{1}{\hat{i}\,\omega L + R + \frac{1}{\hat{i}\,\omega C}}e^{\hat{i}\varphi}$$ Erweitern liefert

$$I_o = U_o\,\frac{R - \hat{i}(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}e^{\hat{i}\varphi} = U_o\,\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{-\hat{i}\varphi}\;e^{\hat{i}\varphi} = U_o\,\frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - {\omega_o}^2\right)^2}}$$

Seien R = 0,5 Ω, L=1mH und C = 0,4 mF

Damit ergibt sich für

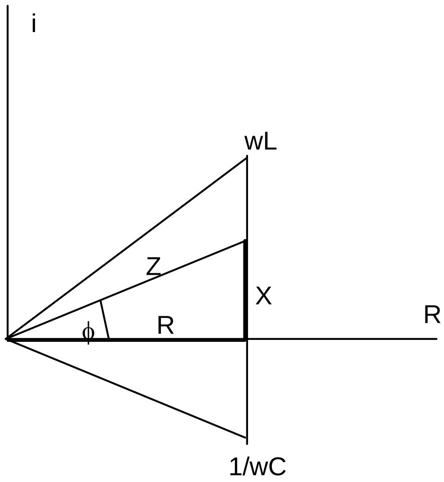
die Eigenfrequenz $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1{,}58\cdot 10^3\ \mathrm{Hz}\cdot$

die Güte $Q = \omega_o\cdot\frac{L}{2R} = 1{,}58$

die Halbwertsbreite $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q} = 1000\,\mathrm{Hz}$

Für die Wechselstromwiderstände ergibt sich dann

Impedanz	$Z = R + \hat{i}\,\frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - {\omega_o}^2\right)$
Scheinwiderstand	$\lvert Z\rvert = \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - {\omega_o}^2\right)^2}$
Wirkwiderstand	$R = \lvert Z\rvert\cos\varphi$
Blindwiderstand	$X = \lvert Z\rvert\sin\varphi$
Phase	$\tan\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - {\omega_o}^2\right)}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$


i
wL
Z
X
R
ϕ
R
1/wC