In RoboLabLabor unserer Schule wurden verschiedene Körper erhitzt und anschließend bei konstanter Raumtemperatur T_R abgekühlt (z.B. Tasse aufgebrühter Tee).
Ihre Temperatur während des Abkühlens wird jeweils durch eine Funktion *T* mit der Gleichung

$$T(t) = T_R + (T_0 - T_R) \cdot e^{-k \cdot t}, \ t \geq 0,$$

beschrieben (*t* in Sekunden, *T*(*t*) in °C). $T_0 = T(0)$ ist die Anfangstemperatur des jeweiligen Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$, $k > 0$ die von Eigenschaften des Körpers abhängige Abkühlungskonstante (Einheit s^{-1} [bzw. 1/s]).
In *Abbildung 1* ist der Graph einer Beispielfunktion *T* dargestellt.

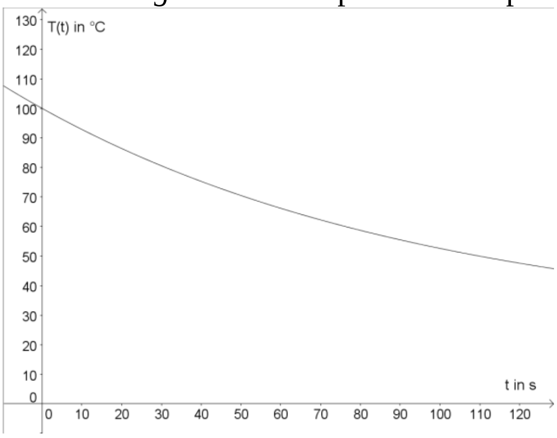

Abb. 1

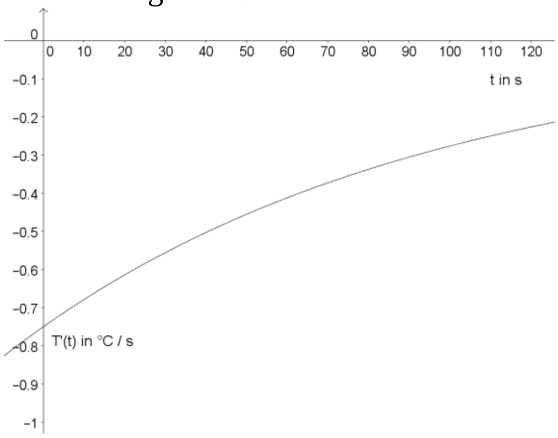

Abb. 2

(1) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen in Abbildung 1 im Sachzusammenhang.
(2) Berechnen Sie die Temperatur, auf die ein Körper K mit der Abkühlungskonstante $k = 0{,}01\ s^{-1}$ und der Anfangstemperatur $T_0 = 100$ °C bei der Raumtemperatur $T_R = 25$ °C nach der Zeit $t = 60$ s abgekühlt ist.
(3) Untersuchen Sie die Entwicklung der Temperatur des Körpers K1 für große t.
(4) Durch $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)\,\mathrm{d}t$ ist die mittlere Temperatur (eines Körpers) innerhalb eines Zeitintervalls $[t_1;t_2]$ definiert.
Weisen Sie nach, dass die mittlere Temperatur über diesem Zeitintervall durch den Term
$\frac{1}{t_2-t_1}\left(25(t_2 - t_1)\right) - 8000(e^{-0{,}01t_2} - e^{-0{,}01t_1})$
berechnet werden kann.
(5) Berechnen Sie die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 60 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.
(6) Abbildung 2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Abkühlungsgeschwindigkeit T′ des Körpers. Zeigen Sie, dass T′ durch die Gleichung $T'(t) = -k \cdot (T_0 - T_R) \cdot e^{-kt}$ für $t \geq 0$ gegeben ist.
(7) Berechnen Sie den größten Betrag der Abkühlgeschwindigkeit während der ersten Minute der Abkühlung.
(8) Ermitteln Sie die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers K während der ersten 60 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.
(9) Berechnen Sie den Zeitpunkt des Abkühlungsvorgangs, zu dem die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers den Wert -0,56 °C/s hat. Sehen Sie einen Zusammenhang zu (8)?
(10) Ermitteln Sie die Zeit, nach der sich die Temperaturdifferenz zwischen Anfangswert und Raumtemperatur auf 62,5 °C halbiert und interpretieren Sie das Ergebnis.
(11) Begründen Sie, weshalb die Definition der mittleren Temperatur aus Aufgabenteil (4) Sinn macht. Interpretieren Sie hierzu u.a. die geometrische Bedeutung des angegebenen Terms für die mittlere Temperatur.

Zweiter Prüfungsteil
Benennen Sie die Lage zweier windschiefer Geraden zunächst geometrisch.
(parallel, Schneiden, identisch, windschief) (2)

Stellen Sie ein Verfahren dar, mit dem man die Lagebeziehung eindeutig bestimmen kann.
(Gleichsetzen und Betrachten der Richtungsvektoren unter Berücksichtigung der Dimension des Lösungsraumes) (5)

Diskutieren Sie die Lage zweier Ebenen im dreidimensionalen und stellen Sie ein Verfahren dar, mit der die Lage eindeutig bestimmt werden kann.
(Gleichsetzen und Argumentation mit Richtungsvektoren und/oder Normalenvektoren) (5)

Nun seien drei Ebenen im dreidimensionalen gegeben. Schnittpunktbestimmung führt auf ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten z.B. in Matrizenform.
Stellen Sie Zusammenhänge her zwischen Rang der Matrix, Rang der erweiterten Matrix, Lösbarkeit des GLS, Schnittmenge, Dimension des Lösungsraumes und Lage der Ebenen zueinander.
(Rang A = Rang A_{erw} => GLS Lösbar, die Ebenen haben gemeinsame Punkte.
Dimension des Lösungsraumes = 3 – Rang A
Rang A <> Rang A_{erw} => GLS nicht lösbar, die Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte,
alle parallel (Rang A =1) oder zwei parallel (Rang A=2) (13)

Betrachtet man nun Matrizen nun als Übergangsmatrizen, die die Entwicklung einer Population über mehrere Generationen beschreibt: (N=Neugeborener, K=Kind, E=Erwachsener)

$$\begin{array}{cc} & \text{von:}\quad N \quad\;\; K \quad\;\; E \\ \begin{array}{r} N \\ nach: K \\ E \end{array} & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(auf Folie)

Interpretieren Sie die Übergangsmatrix im Sachzusammenhang.
(40% der E liefern N, 75% den N werden K, 80% der Kinder werden E, 80% der E überleben) (5)

Berechnen Sie die Population nach einem Jahr, wenn man mit 40 N, 150 K und 100 E beginnt.
(40N, 30K, 200 E) (3)

Beschreiben Sie kurz ein Verfahren um Herauszubekommen, wie die Population um Jahr vorher war.
(Inverse Matrix, ggf. mit Nachfragen: über Adjunkte oder Gaussalgorithmus) (3)

Beschreiben Sie das mathematische Problem, das die Frage nach einer stabilen Population löst.
(Fixpunkte einer Abbildung) (4)

Summe 40

ENDE