Gebrochen rationale Funktionen

Gegeben sei allgemein: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

1) **Definitionsbereich**

D = Menge aller reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Nenners

also bestimmt man zunächst die Nullstellen des Nenners n(x) = 0 zu n_1, n_2, …

und erhält

D = $\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{n1}, \mathbf{n2}, \ldots\}$

2) **Nullstellen**

Die Nullstellen einer Funktion erhält man als Nullstellen des Zählers.

Zu beachten ist, dass sie in der Definitionsmenge liegen müssen:

z(x) = 0 liefert z_1, z_2, … mit

und erhält

Nullstellen = $\{\mathbf{z1}, \mathbf{z2}, \ldots\}$

3) **Ersatzfunktion**

Nun zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren

$$\mathrm{f(x)}=\frac{(x-z_1)(x-z_2)\ldots}{(x-n_1)(x-n_2)\ldots}$$

und kürzt wenn möglich und erhält eine Ersatzfunktion, mit der ab sofort gerechnet wird:

$$\mathrm{e(x)}=\frac{(x-z_1)(x-z_2)\ldots}{(x-n_1)(x-n_2)\ldots}=\frac{(x-z_1)\ldots}{(x-n_1)\ldots}=\frac{z_e(x)}{n_e(x)}$$

diese Ersatzfunktion stimmt mit f(x) überall bis auf die eventuell weggekürzten Definitionslücken überein.

4) **Partialbruchzerlegung**

Partialbruchzerlegung von e(x) = a(x) + rest(x)

5) **Verhalten im Unendlichen**

Der ganzrationale Anteil a(x) bestimmt das Verhalten im Unendlichen

oder

$$\lim_{x\to\infty} e(x) = \begin{matrix} 0, falls\ der\ Grad\ des\ Zählers\ kleiner\ Grad\ des\ Nenners \\ \pm\infty, falls\ der\ Grad\ des\ Zählers\ größer\ Grad\ des\ Nenners \\ a, falls\ Grad\ des\ Zählersgleich\ Grad\ des\ Nenners \end{matrix}$$

6) **Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken**

Der rest(x) bestimmt das Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken

oder:

Ist der Grad der Definitionslücke der Ersatzfunktion

- gerade, verhält sich die Funktion dort wie $1/x^2$

-ungerade, verhält sich die Funktion dort wie 1/x

Hat sich die Definitionslücke aus dem Nenner weggekürzt, liegt eine hebbare Definitionslücke vor.

7) **Extrema**

Notwendig und hinreichende Bedingung für das Vorliegen von Extrema ist ein Vorzeichenwechsel in der Ableitung oder Randwert.

Gemäß Quotientenregel ist

$$e'(x) = \frac{z_e'(x)\cdot n_e(x) - z_e(x)\cdot n_e'(x)}{{n_e}^2(x)}$$

Man erhält als Nullstellen des Zählers k_1, k_2, … (müssen aus D sein) untersucht das Vorzeichenverhalten von e'(x)

x	a	k_1	b	k_2	c
VZ von e'(x)					
Monotonie					
f(x)		$f(k_1)$		$f(k_2)$	

Bei Vorzeichenwechsel von

+ → - Hochpunkt bei (k , e(k))

- → + Tiefpunkt bei (k , e(k))

kein VZW : Wendepunkt bei (k , e(k))

8) **Graph**

Gegeben sei allgemein: $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x^2-4}$

1) **Definitionsbereich**

D = Menge aller reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Nenners

also bestimmt man zunächst die Nullstellen des Nenners n(x) = 0 zu

$x^2 - 4 = 0$

x = 2 v x = -2, also n(x) = (x-2)(x+2)

und erhält

D = $\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{-2 \mid 2}\}$

2) **Nullstellen**

Die Nullstellen einer Funktion erhält man als Nullstellen des Zählers.

Zu beachten ist, dass sie in der Definitionsmenge liegen müssen:

z(x) = 0 liefert

$2x^2-2x - 12 = 0$

$2(x^2 - x - 6) = 0$

x = -2 (nicht Element der Definitionsmenge) v x = 3 , also z(x) = 2(x+2)(x-3)

und erhält

Nullstellen = $\{\mathbf{3}\}$

3) **Ersatzfunktion**

Nun zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren

$$\text{f(x)}=\frac{2\,(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

und kürzt wenn möglich und erhält eine Ersatzfunktion, mit der ab sofort gerechnet wird:

$$\text{e(x)}=\frac{2(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2(x-3)}{x-2}=\frac{z_e(x)}{n_e(x)}$$

diese Ersatzfunktion stimmt mit f(x) überall bis auf die eventuell weggekürzten Definitionslücken überein.

4) **Partialbruchzerlegung**

e(x) = 2(x-3):(x-2)= (nach Polynomdivision)

(2x+6):(x-2)=2-2/(x+2)

<u>-(2x+4)</u>

2

5) **Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken**

e(x) verhält sich in der Umgebung von x=2 wie -1/x in der Umgebung von x=0:

bei x = 2 verhält sich die Funktion wie -1/x: Pol mit VZW von + nach -

bei x = -2 liegt hebbare Definitionslücke vor: e(-2) = 10/4

6) **Verhalten im Unendlichen**

das Verhalten im Unendlichen wird durch den ganzrationalen Anteil nach Polynomdivision bestimmt: a(x) = 2

Also ist $\lim_{x\to\pm\infty} e(x)$=2

7) **Extrema**

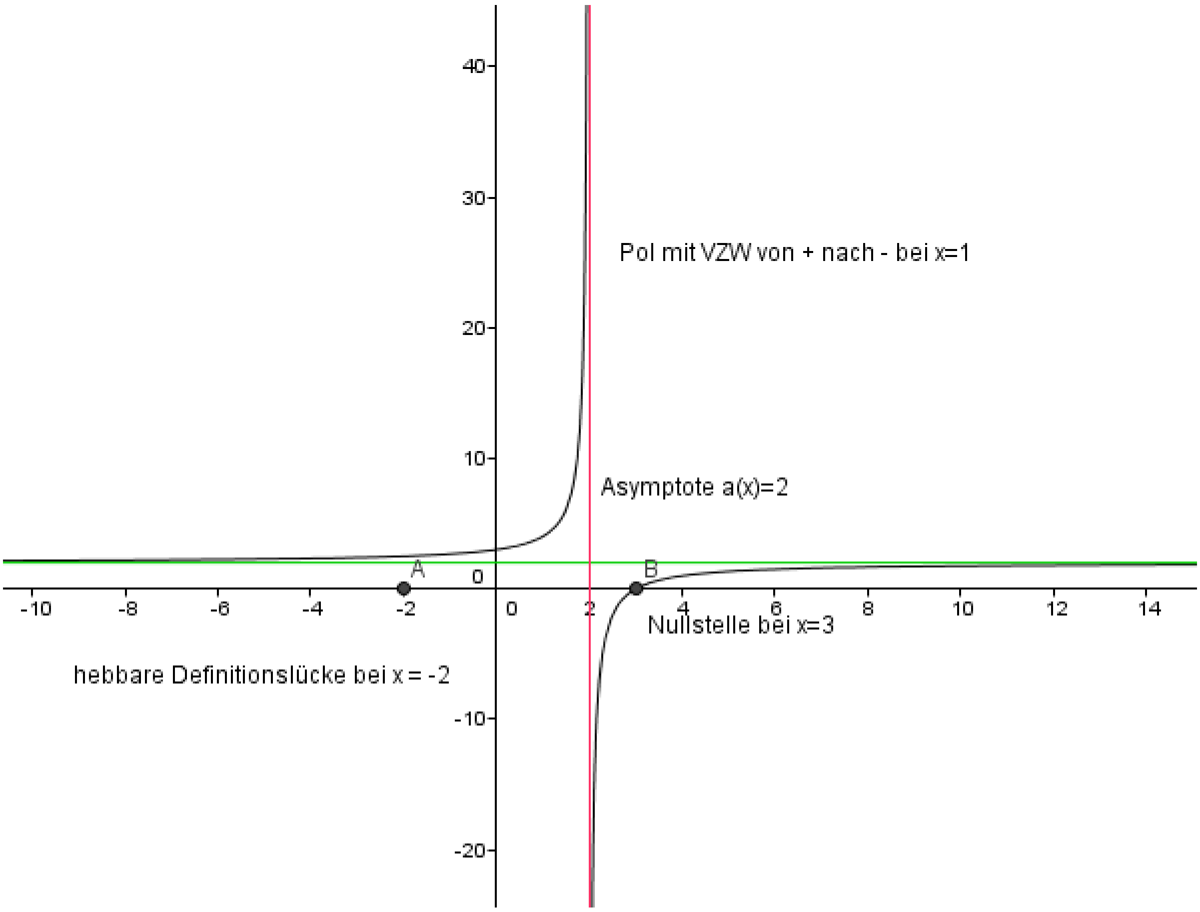
Notwendig und hinreichende Bedingung für das Vorliegen von Extrema ist ein Vorzeichenwechsel in der Ableitung oder Randwert.

Gemäß Quotientenregel ist

$$e'(x) = \frac{2(x-2) - 2(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

Die erste Ableitung hat keine Nullstellen, es liegen keine zu betrachtenden randwerte vor, also hat die Funktion keine Extrema.

8) **Graph**



Gegeben sei allgemein: $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+7x+12}$

1) **Definitionsbereich**

D = Menge aller reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Nenners

also bestimmt man zunächst die Nullstellen des Nenners n(x) = 0 zu

$x^2 + 7x + 12 = 0$

x = -3 v x = -4, also n(x) = (x+3)(x+4)

und erhält

D = $\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{-3} \mid \mathbf{-4}\}$

2) **Nullstellen**

Die Nullstellen einer Funktion erhält man als Nullstellen des Zählers.

Zu beachten ist, dass sie in der Definitionsmenge liegen müssen:

z(x) = 0 liefert

$x^2 - x - 6 = 0$

x =-2 v x = 3 , also z(x) =(x+2)(x-3)

und erhält

Nullstellen = $\{\mathbf{-2}|\mathbf{3}\}$

3) **Ersatzfunktion**

Nun zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren

$\mathrm{f(x)}=\frac{(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-3)}{(x+3)(x+4)}$

Kein Kürzen möglich

4) **Partialbruchzerlegung**

f(x) = $(x^2 - x - 6) : (x^2 + 7x + 12) = 1 + (-8x-18)/(x^2 + 7x + 12)$(nach Polynomdivision)

$\underline{-(x^2 + 7x + 12)}$

$-8x - 18$

5) **Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken**

f(x) verhält sich in der Umgebung

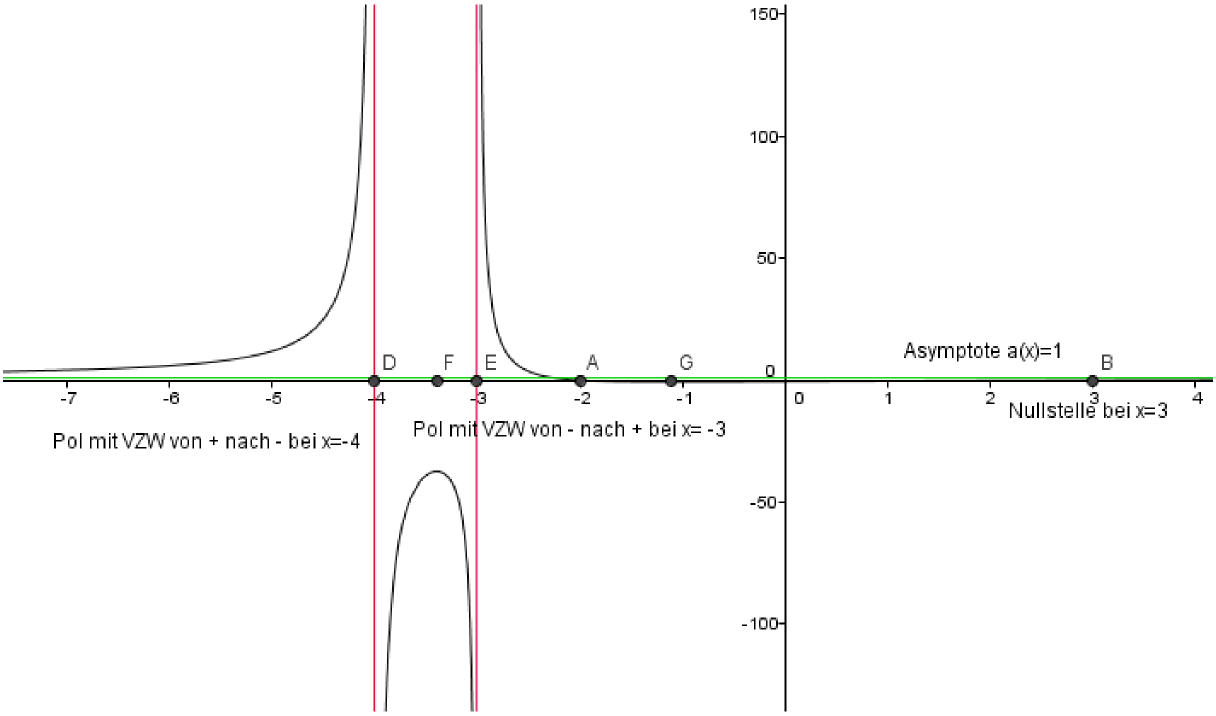
bei x = -4 Pol mit VZW von plus nach minus durch Probieren mit x=-5 und x= -3,5

bei x = -3 Pol mit VZW von minus nach plus durch Probieren mit x=-3,5 und x= -2

6) **Verhalten im Unendlichen**

das Verhalten im Unendlichen wird durch den ganzrationalen Anteil nach Polynomdivision bestimmt: a(x) = 1

Also ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$=1



7) **Extrema**

Notwendig und hinreichende Bedingung für das Vorliegen von Extrema ist ein Vorzeichenwechsel in der Ableitung oder Randwert.

Gemäß Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+7x+12)-(x^2-x-6)(2x+7)}{(x^2+7x+12)^2} = \frac{28x^2+36x+30}{(x^2+7x+12)^2}$$

Die erste Ableitung hat Nullstellen bei x=-3,4 oder x=-1,1

x	Pol -4	-3,5	**-3,4**	-3,3	Pol -3	-2	**-1,1**	0
VZ von e'(x)		**+**		**-**		**-**		**+**
Monotonie		steigend		fallend		fallend		steigend
f(x)			-37,33				-0,28	

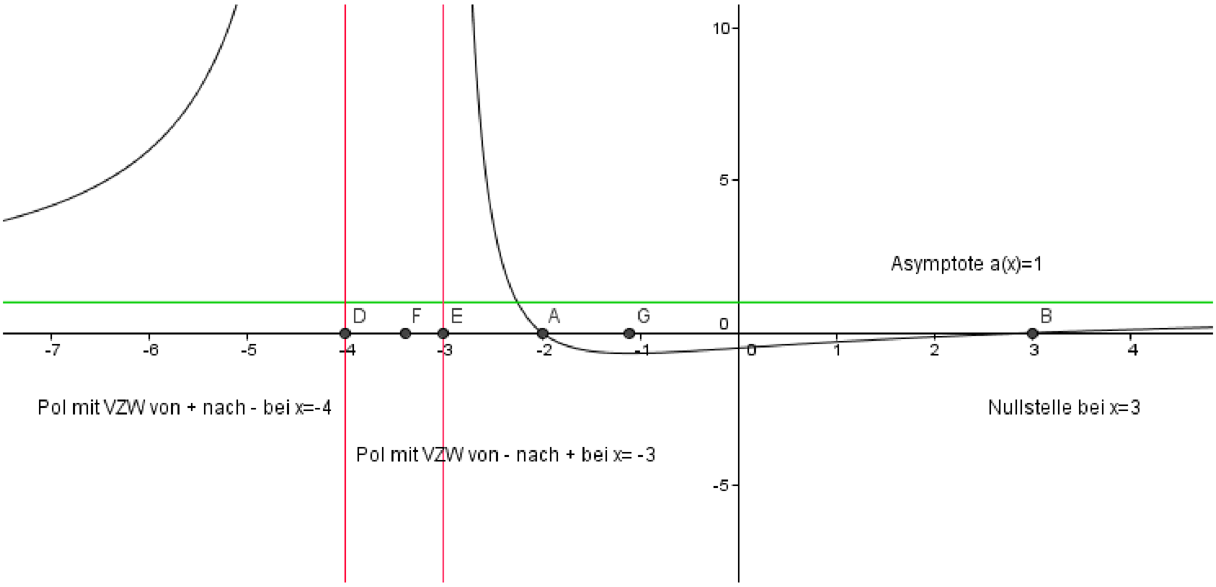
Bei Vorzeichenwechsel von

+ → - Hochpunkt bei (- 3,4| -37,33)

- → + Tiefpunkt bei (-1,1 , -0,28)

8) **Graph**

(detailliert)



Gegeben sei allgemein: $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$

1) **Definitionsbereich**

D = Menge aller reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Nenners

also bestimmt man zunächst die Nullstellen des Nenners n(x) = 0 zu

x - 1 = 0

x = 1 also n(x) = (x -1)

und erhält

D = $\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{1}\}$

2) **Nullstellen**

Die Nullstellen einer Funktion erhält man als Nullstellen des Zählers.

Zu beachten ist, dass sie in der Definitionsmenge liegen müssen:

z(x) = 0 liefert

$x^2 - x - 6 = 0$

x =-2 v x = 3 , also z(x) =(x+2)(x-3)

und erhält

Nullstellen = $\{-\mathbf{2}|\mathbf{3}\}$

3) **Ersatzfunktion**

Nun zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren

$$\mathrm{f(x)}=\frac{(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-3)}{x-1}$$

Kein Kürzen möglich

4) **Partialbruchzerlegung**

f(x) = $(x^2 - x - 6) : (x - 1) = x – 6/(x-1)$(nach Polynomdivision)

$\underline{-(x^2 - x)}$

- 6

5) **Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken**

f(x) verhält sich in der Umgebung

bei x = 1 wie -1/x in der Umgebung von 0: Pol mit VZW von plus nach minus

6) **Verhalten im Unendlichen**

das Verhalten im Unendlichen wird durch den ganzrationalen Anteil nach Polynomdivision bestimmt: a(x) = x

Also ist $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Also ist $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

7) **Extrema**

Notwendig und hinreichende Bedingung für das Vorliegen von Extrema ist ein Vorzeichenwechsel in der Ableitung oder Randwert.

Gemäß Quotientenregel ist

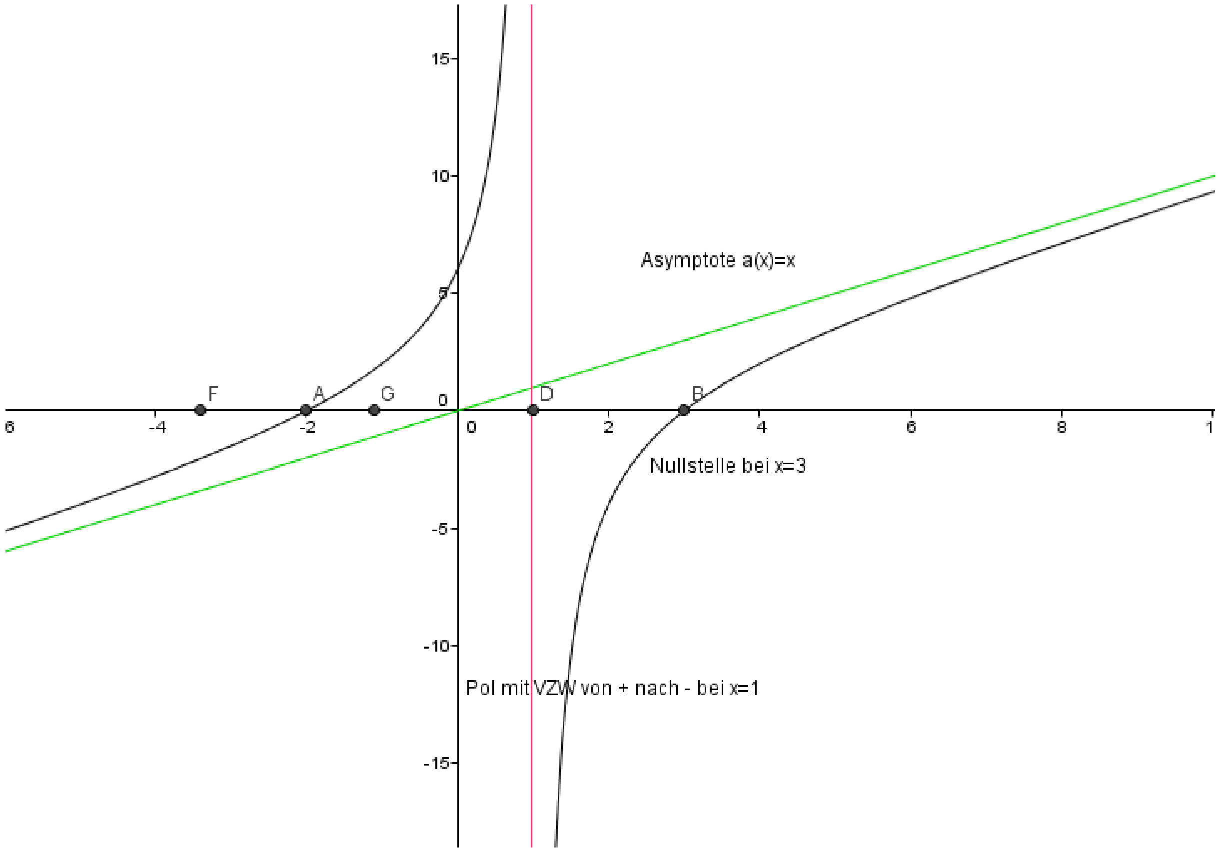
$$f'(x) = \frac{x^2-2x+7}{(x-1)^2}$$

Die erste Ableitung hat keine Nullstellen

Also keine Extrema

8) **Graph**

(detailliert)

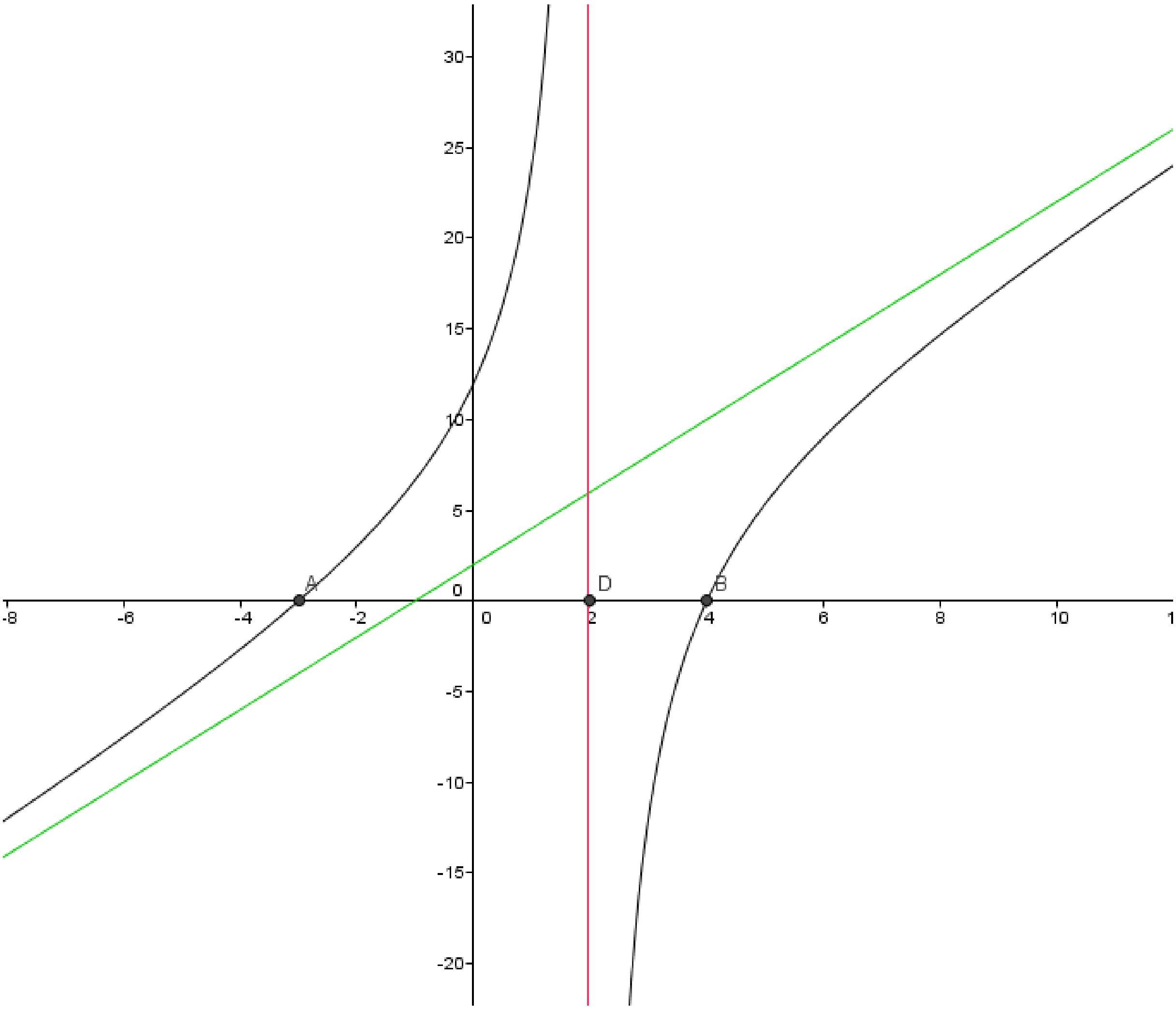


SOL und Hausaufgabe

Diskutiere analog

1) $f(x) = \frac{2x^2-2x-24}{x-2}$

zur Kontrolle:



2) Diskutiere

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 7x + 8}$$

Zur Kontrolle: