

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{4x}{x^2 + a}, \quad a > 0.$$

Auf Seite 2 ist der Graph von f_1 ($a = 1$) abgebildet. Für die zweite Ableitung gilt:

$$f_a''(x) = \frac{8x^3 - 24ax}{(x^2 + a)^3} \quad (\text{kein Nachweis erforderlich}).$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den maximalen Definitionsbereich, die Null- und Extremstellen und begründen Sie, wie der Graph für $x \rightarrow \pm\infty$ verläuft. (14 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wendestellen von f_2 ($a = 2$). (7 Punkte)

c) $T_a\left(-\sqrt{a} \mid -\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ und $H_a\left(\sqrt{a} \mid \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ sind die Extrempunkte des Graphen von f_a .

Geben Sie die Gleichung der Funktion g an, auf deren Graph alle Extrempunkte der Schar liegen.

Untersuchen Sie, ob jeder Punkt des Graphen von g auch ein Extrempunkt einer der Scharkurven ist. (Dabei wird für g der maximale Definitionsbereich zugrunde gelegt.)

(6 Punkte)

d) Der Graph von f_1 schließt mit der Geraden $y = x$ eine im ersten Quadranten gelegene Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (12 Punkte)

e) Die Strecke von T_a nach H_a soll die Seite eines Quadrats bilden.

Ermitteln Sie den Wert von a , für den der Flächeninhalt dieses Quadrats minimal wird.

(11 Punkte)

