Inverse Matrix: Bestimmung mit Adjunkten

von Felix Kirchmann

Zusammenhang:
Adjunkte und Inverse Matrix

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \operatorname{adj}(M)$$

$M \in K^{n \times n}$	Beliebige invertierbare Matrix
$\det(M)$	Determinante der Matrix M
$\operatorname{adj}(M)$	Adjunkte der Matrix M

Adjunkte einer 2×2-Matrix

$$adj(M) \quad M \in K^{2\times 2}$$

$$= adj\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(M) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times adj(M) = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Adjunkte einer 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

Adjunkte einer 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$

$$\operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} ei - fh & hc - ib & bf - ec \\ fg - di & ia - gc & cd - af \\ dh - eg & gb - ha & ae - bd \end{pmatrix}$$

Adjunkte einer 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$

$$\operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{ei - fh} & hc - ib & bf - ec \\ fg - di & ia - gc & cd - af \\ dh - eg & gb - ha & ae - bd \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \operatorname{adj}(M)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$$

und

$$A^{-1} = \frac{A^{\#}}{\det A}$$

Die Determinante hatten wir oben berechnet. det B = -12

$A^{\#}$ ist dabei die Adjunkte der Matrix A und
$a_{ij}^{\#}$ sind die Glieder der Adjunkte
$\det A$ ist die Determinante der Ursprungsmatrix
A^{-1} ist die Inverse der Ursprungsmatrix

Die Adjunktenglieder berechnen sich wie folgt:

$$a_{11}^{\#} = (-1)^{1+1} \cdot \det B_{11} = +1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = 6$$

$$a_{12}^{\#} = (-1)^{1+2} \cdot \det B_{21} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 6 - 0 \cdot 2) = -18$$

$$a_{13}^{\#} = (-1)^{1+3} \cdot \det B_{31} = +1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = +1 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0$$

http://volkerbehrens.de/daten/Die%20inverse%20Matrix.pdf

Die Adjunkte ist also

$$B^{\#} = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Dann ist:

$$B^{-1} = \frac{B^{\#}}{\det B} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -18 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}}{-12} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$