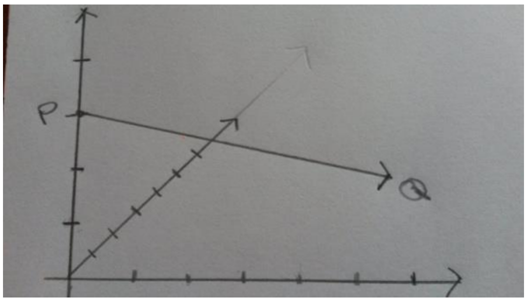
Stundenprotokoll zur Stunde am 20.11.2014

Thema der Stunde: lineare Algebra, Vektoren, partielle Integration

Diese Stunde war die letzte Stunde vor der Klausur und deshalb wurden noch einmal dringende Fragen geklärt. Wir haben die Stunde damit begonnen Abstände, Längen und Winkel bei Vektoren zu berechnen. Zum Abstand gehörte ebenfalls, den Abstand einer Ebene zum Ursprung zu berechnen. Die Winkelberechnung wurde unterteilt in Winkel zwischen zwei Geraden, Winkel zwischen Gerade/Ebene und Winkel zwischen Ebene/Ebene. Anschließend haben wir eine Ebene in Koordinatenform in eine Ebene in Parameterform umgewandelt. Zum Schluss haben wir dann anhand eines Beispiels die partielle Integration wiederholt.

Längen, Abstand und Winkel



$\underset{PQ}{\rightarrow}\|$ =Abstand von P nach Q

P⟨0|0|3⟩ Q⟨4|5|0⟩

$\rightarrow \underset{PQ}{\rightarrow}\| = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}$

$\underset{PQ}{\rightarrow}\| = \sqrt{4^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

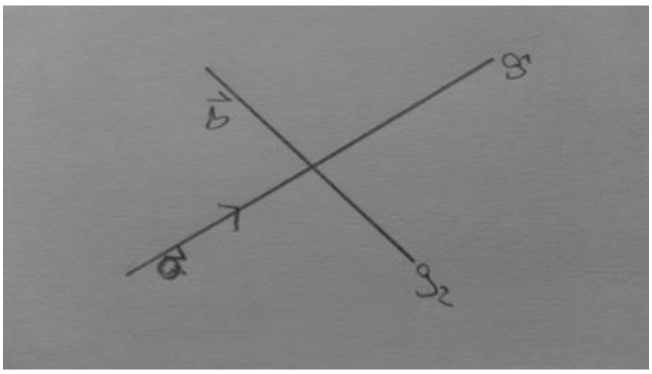
Abstand einer Ebene zum Ursprung

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \quad | : \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ = $\sqrt{14}$

HNF: $\frac{1}{\sqrt{14}}(2x_1 + 3x_2 - x_3) = \frac{5}{\sqrt{14}}$ = $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ ← rechts vom Gleichheitszeichen: Abstand der Ebene zum Ursprung

Winkel zwischen Geraden

Winkel (g_1/g_2) = Winkel $(\underset{a}{\rightarrow},\underset{b}{\rightarrow})$ = arccos $\left(\frac{\vec{a}}{\|\underset{a}{\rightarrow}\|} * \frac{\vec{b}}{\|\underset{b}{\rightarrow}\|}\right)$



$\underset{a}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underset{b}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Winkel $(\underset{a}{\rightarrow}, \underset{b}{\rightarrow})$ = arccos $\left(\frac{3}{\sqrt{17 * \sqrt{25}}}\right)$ = 81,6°

Winkel Gerade/Ebene

g: $\underset{x}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

E: $\underset{x}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Um eine Gerade und eine Ebene zu schneiden benötigt man den Richtungsvektor der Geraden und den Normalenvektor der Ebene

Für NV: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ v $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

$n_1 + 2n_3 = 0$ sei $n_3 = 1$

$\leftrightarrow n_1 + 2 = 0$

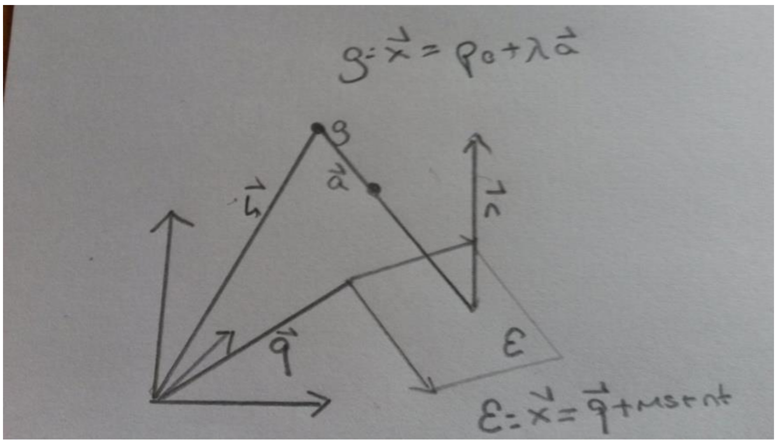
$\leftrightarrow n_1 = -2$

$2n_1 + n_2 + 3n_3 = 0$ sei $n_3 = 1$

$\leftrightarrow -4 + n_2 + 3 = 0$

$\leftrightarrow n_2 = 1$

also $\underset{n}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Winkel (g,E) = Winkel $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ = arccos $\left(\frac{-3}{\sqrt{2 * \sqrt{6}}}\right)$ = 150° da man i.d.R. Innenwinkel sucht: 30°

Winkel Ebene/Ebene

Winkel (E_1/E_2) = Winkel $(\underset{n_1}{\rightarrow}/\underset{n_2}{\rightarrow})$

Koordinatenform in Parameterform umwandeln

Koordinatenform $2x_1$-x_2+$5x_3$=7

Normalenform: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} *\underset{x}{\rightarrow}$ = 7

Hessesche Normalenform: $\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} *\underset{x}{\rightarrow}$ = $\frac{7}{\sqrt{30}}$

Für die Parameterform benötigt man drei Punkte, die in der Ebene liegen

$\underset{p_0}{\rightarrow}= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \underset{p_1}{\rightarrow}= \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underset{p_2}{\rightarrow}= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E: $\underset{x}{\rightarrow}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$+ ʎ$\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$+μ$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$

Partielle Integration

$\int_0^1 x * e^{2x}$dx

Nebenrechnung: $\int x * e^{2x}$dx= x*$\frac{1}{2}e^{2x}$-$\int \frac{1}{2}e^{2x}$dx

= $\frac{1}{2}xe^{2x}$-$\frac{1}{4}e^{2x}$

da $\int uv'dx$= uv-$\int u'v\ dx$

u=x und v'=e^{2x}

$\int_0^1 x * e^{2x}$dx= = $\frac{1}{2}xe^{2x}$- $\frac{1}{4}e^{2x}$ |1,0

$= \frac{1}{2}e^{2}$- $\frac{1}{4}e^{2}$- (0-$\frac{1}{4}e^{0}$)

$= \frac{1}{2}e^{2}$- $\frac{1}{4}e^{2}$+$\frac{1}{4}e^{0}$

$= \frac{1}{4}e^{2}$- $\frac{1}{4}$

von Tobias Peterssen