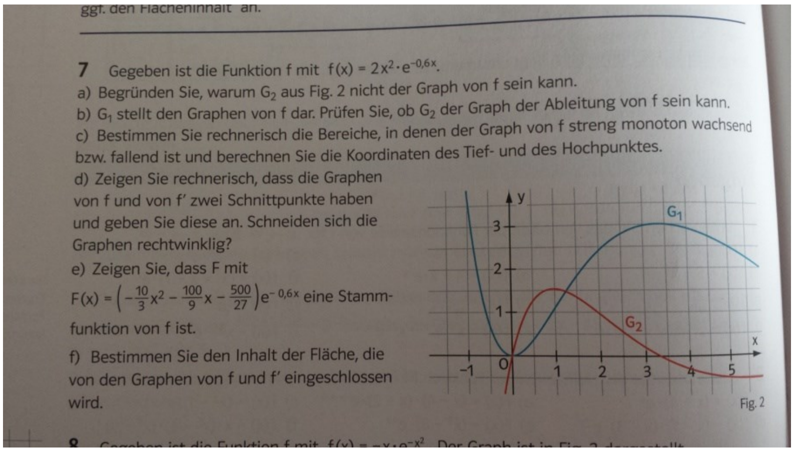
Stundenprotokoll für Montag, den 3.11.2014

Thema: Analysis, Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Zum Bearbeiten dieses Themas sind wir auf die Aufgaben a), b) und c) der Aufgabe 7 von Seite 88 im Mathematikbuch eingegangen, welche auch schon Hausaufgaben für jene Stunde waren. Hierzu haben wir die Aufgabe a) angefangen an der Tafel zu lösen. Die Aufgabe bestand darin, zu begründen, ob G2 der Graph von f sein kann.



ggf. den Flächeninhalt an.

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 \cdot e^{-0,6x}$.
a) Begründen Sie, warum G_2 aus Fig. 2 nicht der Graph von f sein kann.
b) G_1 stellt den Graphen von f dar. Prüfen Sie, ob G_2 der Graph der Ableitung von f sein kann.
c) Bestimmen Sie rechnerisch die Bereiche, in denen der Graph von f streng monoton wachsend bzw. fallend ist und berechnen Sie die Koordinaten des Tief- und des Hochpunktes.
d) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f und von f′ zwei Schnittpunkte haben und geben Sie diese an. Schneiden sich die Graphen rechtwinklig?
e) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \left(-\frac{10}{3}x^2 - \frac{100}{9}x - \frac{500}{27}\right)e^{-0,6x}$ eine Stammfunktion von f ist.
f) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und f′ eingeschlossen wird.

Fig. 2

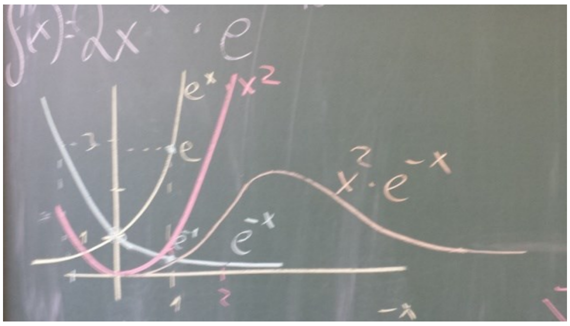
Die erste These war, dass G2 **nicht** der Graph von der Funktion f sein kann, da der Graph aufgrund dem Faktor 2 vor dem x² auch um 2 verschoben sein müsste. Da es zunächst zu keinem eindeutigen Ergebnis kam, wurde der Kurs in 5 Gruppen aufgeteilt, die sich jeweils ihre eigene These überlegen sollten. Die folgenden 5 Thesen lauteten:

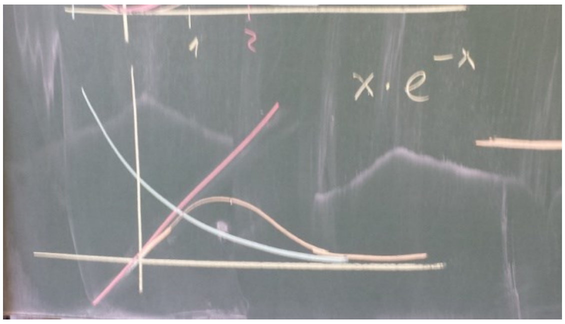
1) G2 nicht der Graph von f, da G2 nach unten geöffnet ist, aber eigentlich nach oben geöffnet sein müsste
2) G2 nicht der Graph von f, da man eine Zahl eingesetzt hat und das Ergebnis nicht mit dem Graphen übereinstimmte

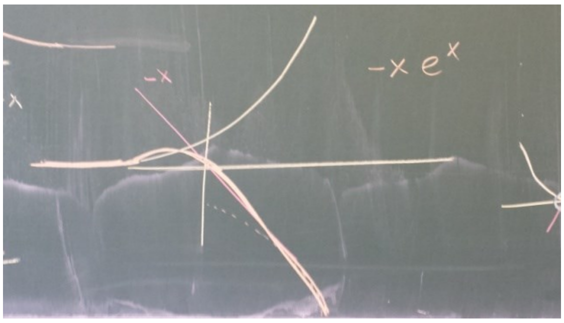
3,4) G2 nicht der Graph von f, da beim Ausrechnen der Nullstellen von f man nur ein Ergebnis erhält, man beim Graphen G2 jedoch schon 2 Nullstellen erkennen kann

5) G2 nicht der Graph von f, da für x=-1 ein positiver Wert rauskommt, der Graph G2 an dieser Stelle jedoch negativ ist

Nach folgender Diskussion, welche These richtig oder falsch sei, wurde beschlossen, dass eine Zahl wie in These 2 oder 5 einzusetzen hier vollkommen als Beweis ausreicht, aber auch mit den Nullstellen wie in These 3 und 4 zu argumentieren sei korrekt. Lediglich These 1 weißt Mängel auf, da die e-Funktion die Potenzfunktion majorisiert und damit der Graph gegen 0 geht und es dementsprechend falsch ist, mit den Grenzwerten zu argumentieren.
Dann wurde die e-Funktion in 3 verschiedenen Varianten an die Tafel gezeichnet:

1) 

2) 

3) 

Bei Bild 1 wurde sowohl e^x als auch e^-x eingezeichnet. Sie spiegeln sich an der y-Achse und man kann e und e^-1 an ihnen ablesen. Der Graph x^2*e^-x ist die Zusammensetzung der Graphen x^2 und e^-x und verdeutlicht, dass die e-Funktion hier majorisiert, da der Graph gegen 0 geht. Auf Bild 2 sind zwei weitere Zusammensetzungen zu erkennen mit x*e^-x und –x*e^x.

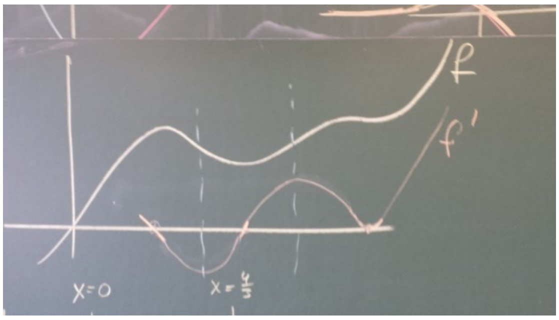
Im Folgenden wurde dann die Aufgabe b) der Hausaufgaben an der Tafel gelöst. Nun sollte man prüfen, ob G2 der Graph der Ableitung von f sein kann. Zum Bearbeiten der Aufgabe wurde erst die Ableitung f' gebildet und dessen Nullstellen ausgerechnet.

f'(x)= 4x*e^(-0,6x)+2x^2*(-0,6)*e^(-0,6x) <- Produktregel angewendet

= x*e^(-0,6x)*(4-1,2x) <- x und e^(-0,6x) ausgeklammert

Diese Funktion wurde dann 0 gesetzt. Da ein Produkt nur 0 sein kann, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist, erhält man die Werte x=0 und x=3,3 als die 2 Nullstellen von f‘.
Daraufhin wurde festgehalten, dass die Extrema von G1 mit den Nullstellen von G2 übereinstimmen und dies hat nun ergänzt und bewiesen, dass G2 durchaus der Graph der Ableitung von f sein kann.

Vor der Pause wurde nun folgender Graph f angegeben und die Aufgabe war, den Graph der Ableitung f‘ frei anzuzeichnen. Auf folgendem Bild sind beide Graphen zu erkennen:

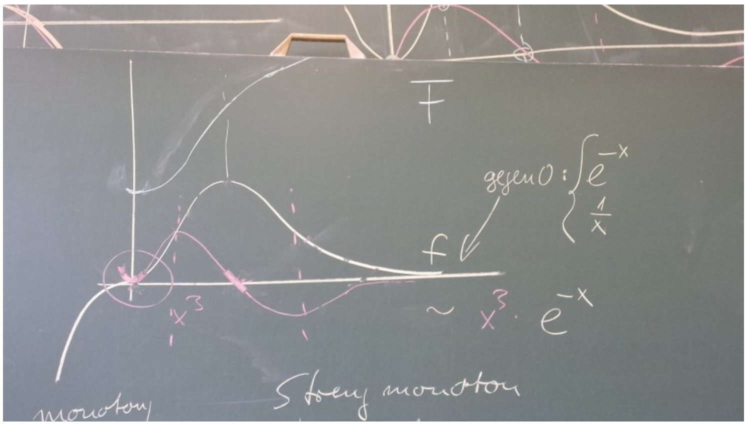


Und zwar lässt sich der Graph von f‘ auf folgende Hypothesen zurückführen:

1) HP bei f = NS bei f‘ vom positiven in den negativen Bereich
2) TP bei f = NS bei f‘ vom negativen in den positiven Bereich
3) WP bei f = Extrema bei f‘
4) SP bei f = NS bei f‘ die im positiven Bereich bleibt, also auch ein TP ist

Diese 4 Punkte verbunden ergeben den Graphen f‘.

Nach der Pause wurde nun folgender Graph f gegeben und man sollte F und f‘ anzeichnen:



Zunächst wurde noch gefragt den Funktionsterm von f anzugeben:

1) Da der Graph gegen 0 läuft, muss entweder der Funktionsterm e^(-x) oder 1/x vorhanden sein. Letzteres kann man jedoch ausschließen, da dadurch 0 nicht definiert sein kann, was sich mit dem Graphen widerspricht, es muss also e^(-x) sein.
2) Der Rest des Graphen mit dem Sattelpunkt vom negativen in den positiven Bereich ist sehr wahrscheinlich durch x^3 angegeben, sodass sich folgende Funktion ergibt:
   x^3*e^(-x)

Den Graphen der Funktion F ist nun auf folgende Hypothesen zurückzuführen:

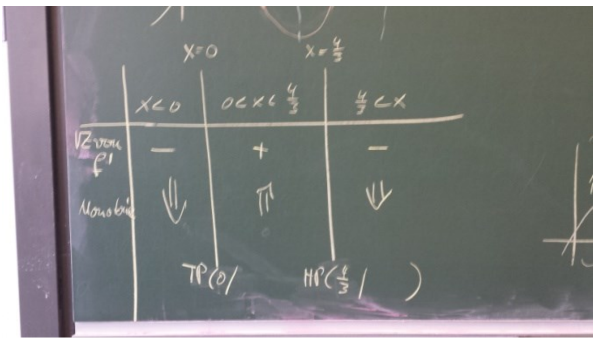
1) SP und NS vom negativen in den positiven Bereich bei f = TP bei F
2) HP bei f = Links-Rechts-WP bei F
3) Da f nun immer nur noch gegen 0 geht, aber nie 0 wird, wird F auch nur noch flacher, aber nie mit der Steigung 0.

Um den Graphen von f‘ anzuzeichnen kann man wieder folgende Hypothesen aufstellen:

1) SP mit nur positiver Steigung und NS bei f = TP und NS bei f‘
2) HP bei f = NS bei f‘ vom positiven in den negativen Bereich
3) WP bei f = TP bei f‘
4) Der Rest des Graphen geht gegen 0, aber wird nie 0

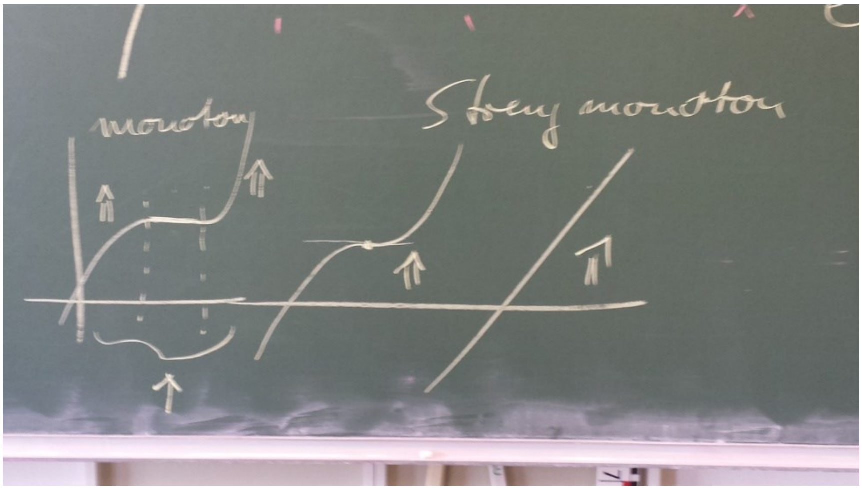
Daraus lässt sich wie im Bild zu erkennen der Graph f‘ einzeichnen.

Gegen Ende der Stunde wurde noch die Aufgabe c) an der Tafel bearbeitet. Diese verlangt die Bereiche auszurechnen, an denen der Graph streng monoton wachsend und fallend ist. Hierfür wird das Mittel des Vorzeichenwechsels verwendet. Es wurde folgende Tabelle an die Tafel gezeichnet um die Monotonie auszurechnen und zu verdeutlichen:



Mit dem Vorzeichen bei f‘ konnte die Monotonie des Graphen f an verschiedenen Bereichen ausgerechnet werden. Man erhält eine strenge fallende Monotonie bis zum TP bei (0/y), dann wieder eine streng wachsende Monotonie bis zum HP bei ((4/3)/y) und dann wieder eine streng fallende Monotonie.

Zum Schluss wurde noch geklärt, was strenge Monotonie bedeutet. Auf dem folgenden Bild ist a) nur monoton steigend, da ein großer Teil vom Graphen zwischendurch die Steigung 0 besitzt. Die Graphen bei b) und c) sind hingegen als streng monoton steigend anzusehen:



Für nächste Stunde sind die beiden Beispiele 1 und 2 auf Seite 89 und auf Seite 90 die Aufgabe 1 zu bearbeiten.

Verfasser: Julian Kandt