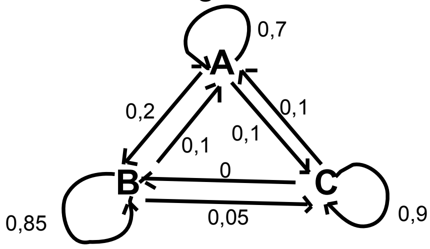
Jan Brock 03.09.2014

Stundenprotokoll vom 28.08.2014
Matrizen

In der Mathematikstunde am 28.08.2014 haben wir uns mit Übergangsmatrizen und Populationsmatrizen beschäftigt.
Wir besprachen den Inhalt der nächsten Klausur, also Austauschprozesse und Matrizen.
Als erstes wiederholten wir die Umformung einer Matrix in ein Übergangsdiagramm:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \qquad \text{Von: } \begin{pmatrix} \text{A zu A} & \text{B zu A} & \text{C zu A} \\ \text{A zu B} & \text{B zu B} & \text{C zu B} \\ \text{A zu C} & \text{B zu C} & \text{C zu C} \end{pmatrix}$$

Hat man eine Matrix und eine Anfangsverteilung, kann man die Verteilung nach einem bestimmten Zeitraum berechnen.
Um die Verteilung nach einem Jahr zu berechnen, (wenn die Matrix eine Verteilung über ein Jahr hin beschreibt) rechnet man die die Populationsmatrix mal dem Vektor der Ausgangspopulation.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 140 \\ 840 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7*140 + 0{,}1*840 + 0{,}1*220 \\ 0{,}2*140 + 0{,}85*840 + 0*220 \\ 0{,}1*140 + 0{,}05*840 + 0{,}9*220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 742 \\ 254 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Verteilung nach mehreren Jahren gibt es zwei Verfahren:
Erstens kann man die Populationsmatrix mal dem Vektor der Verteilung nach einem Jahr rechnen und erhält die Verteilung nach zwei Jahren.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 204 \\ 742 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183{,}6 \\ 779{,}1 \\ 266{,}7 \end{pmatrix}$$

Um nun die Verteilung nach n Jahren zu berechnen, rechnet man die Populationsmatrix hoch n und mal dem Vektor der Ausgangspopulation.

Formel:
Population nach n Jahren = Populationsmatrix^n * Ausgangspopulation

Anschließend wiederholten wir noch die allgemeinen Rechenregeln von Matrizen.

Addition / Subtraktion:
Bei der Addition / Subtraktion von Matrizen addiert bzw. subtrahiert man jeden Wert der ersten Matrix mit dem entsprechendem Wert der zweiten Matrix.
Bedingung: Die Matrizen müssen die selbe Zeilen und Spaltenzahl haben.

Multiplikation:
Bei der Multiplikation von Matrizen multipliziert man alle Werte der Zeilen der ersten Matrix mit jedem Wert der Spalten der zweiten Matrix.
Bedingung: Die erste Matrix muss die selbe Anzahl von Zeilen haben wie die zweite Matrix Spalten.

Im zweitem Teil der Stunde beschäftigten wir uns noch mit der Bestimmung des Fixvektors, also einer Verteilung, die dauerhaft stabil bleibt.

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Hat man eine Populationsmatrix, kann man den Fixvektor berechnen indem man die Matrix und den unbekannten Vektor in ein lineares Gleichungssystem bringt und die Unbekannten ausrechnet. Diese bilden den Fixvektor.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} 0{,}7a+0{,}10b+0{,}1c=a \\ 0{,}2a+0{,}85b+0{,}0c=b \\ 0{,}1a+0{,}05b+0{,}9c=c \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} -0{,}3a+0{,}10b+0{,}1c=0 \\ 0{,}2a-0{,}15b+0{,}0c=0 \\ 0{,}1a+0{,}05b-0{,}1c=0 \end{matrix}$$