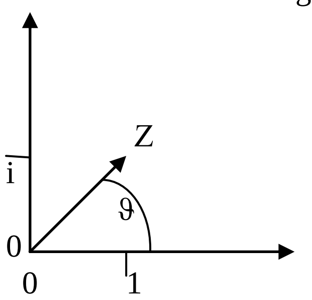
Stundenprotokoll vom 1.10.2013
Thema: Differentialgleichungen

von Sebastian Hallstein

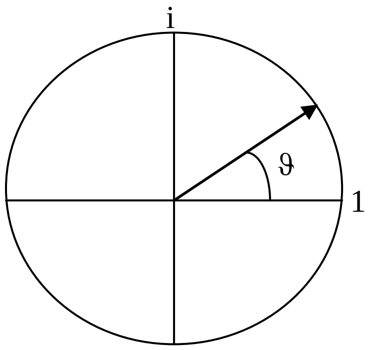
Exkurs komplexe Zahlen:

$X^2 = -1$ hat die Lösung i



$Z = 2+1*i$
$= (|Z|;\vartheta) = [\sqrt{2^2+1^2} ; \text{actan}1/2]$

Länge Winkel

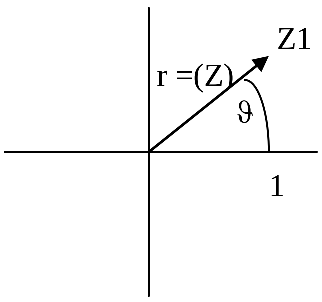


Jede Zahl auf dem Einheitskreis kann durch $Z= e^{i*\vartheta}$ dargestellt werden.

Addition von komplexen Zahlen

$Z1=a1+b1*i$
$Z2=a2+b2*i$

$Z1+Z2=(a1+a2)+(b1+b2)*i$
$Z1+Z2=(a1*a2-b1*b2)+(a1*b2+a2*b1)*i$



Multiplikation von komplexen Zahlen

$Z1=|Z1|*e^{(i*\vartheta1)}$
$Z2=|Z2|*e^{(i*\vartheta2)}$
$Z1*Z2=|Z1|*|Z2|*e^{[i*(\vartheta1*\vartheta2)]}$

Faszinierend: Man kann die Multiplikation von komplexen Zahlen mit einer simplen Addition vereinfachen.

Differentialgleichungen

a) $Z'(x) = c$

$Z(x) = c*x$

b) $Z'(x) = Z(x) = c*Z(x)$

$Z(x) = e^{(c*x)}$

c) $Z''(x) = c*Z(x) = c*e^{[(\sqrt{c})*x]}$ $\quad c \geq 0$

$Z'(x) = (\sqrt{c})*e^{[(\sqrt{c})*x]}$

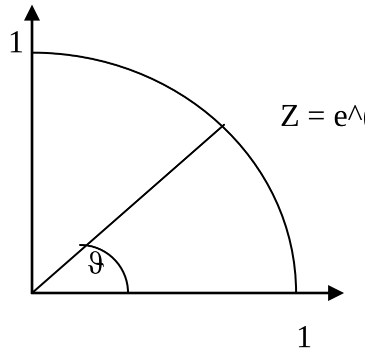
$Z(x) = e^{[(\sqrt{c})*x]}$

d) $Z''(x) = -c*Z(x)$ $\quad c \geq 0$

$Z(x) = e^{[(\sqrt{c})*x]}$

$= e^{[i*(\sqrt{c})*x]}$

$= \cos(\sqrt{c})*x+i*\sin(\sqrt{c})*x$



$Z = e^{(i* \vartheta)} = \cos(\vartheta) + i*\sin(\vartheta)$

= Realteil + Imaginärteil(i)

e)Homogenes Gleichungssystem

$a*Z''+bZ' = c*Z = 0$

$Z''+mZ'+nZ = 0$

Beispiel aus der Physik:

Kräfte(Federkräfte;Reibungskräfte)

$F(Feder) = -D*s$

$F(Kraft\ allgemein) = m*s''$ (s wurde nach der Zeit abgeleitet)

Daraus folgt: $-D*s = m*s''$

$\leftrightarrow m*s''+D*s = 0$

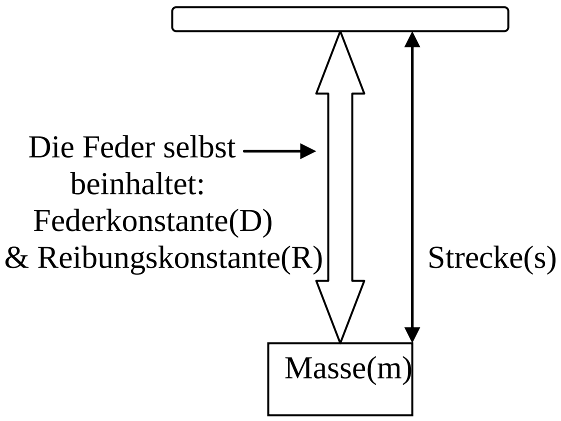
$\leftrightarrow s''+D/m*s = 0$

Zusammen mit Reibungkraft

$F(Reibung) = -R*s'$

$-D*s-R*s' = m*s''$

$\leftrightarrow m*s''+R*s'+D*s = 0$



Lösungsansatz:
S(t) = S0*e^(t*ω*i)
S´(t) = S0*ω*i*e^(t*ω*i)
S´´(t) = S0*ω^2*i^2*e^(t*ω*i)

m*(So* ω^2*i^2*e^(t*ω*i))+R*(S0*ω*i*e^(t*ω*i))+D*(S0*e^(t*ω*i))

S0* e^(t*ω*i)*(m* ω^2*i^2+R*ω*i+D)
i^2 = -1
S0* e^(t*ω*i)*(-m* ω^2+R*ω*i+D)

Anwenden der PQ-Formel
ω = -(-i*R/(2*m))+√[(-i*R/(2*m))^2+D/m]
= i*R/(2*m)+√[-(R/(2*m))^2+D/m]

ω = -(-i*R/(2*m))-√[(-i*R/(2*m))^2+D/m]
= i*R/(2*m)-√[-(R/(2*m))^2+D/m]

einsetzen von ω+ führt zu:
S(t) = S0*e^[(-R/2*m)*t]*e^i*√[-(R/(2*m))^2+D/m]*t