Abbildung 1 zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas. Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen. Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

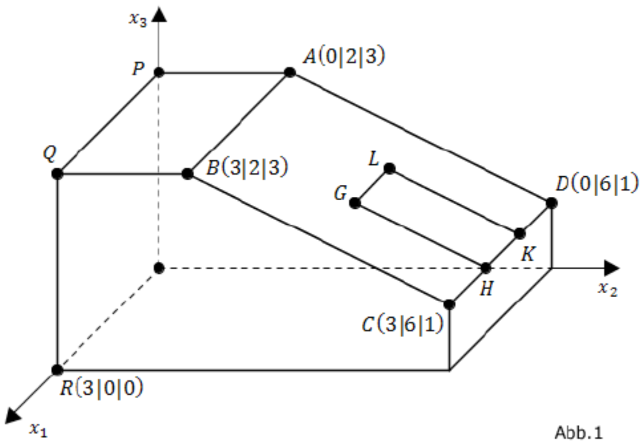

Abb.1

Teilaufgabe a (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$)

Teilaufgabe b (2 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E.

Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. das Zimmer ist an seiner höchsten Stelle 3 m hoch.

Das Rechteck $GHKL$ mit $G(2|4|2)$ hat die Breite $\overline{GL} = 1$. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

Teilaufgabe c (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters.

(zur Kontrolle: $\overline{GH} = \sqrt{5}$)

Teilaufgabe d (6 BE)

Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand $OPQR$ im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand $OPQR$ einschließt.

Teilaufgabe e (4 BE)

Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken $[GH]$ und $[LK]$ verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[GH]$ und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann.

(Teilergebnis: $M(2|5|1,5)$)

Abbildung 2 zeigt ein quaderförmiges Möbelstück, das 40 cm hoch ist. Es steht mit seiner Rückseite flächenbündig an der Wand unter dem Fenster. Seine vordere Oberkante liegt im Modell auf der Geraden $k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

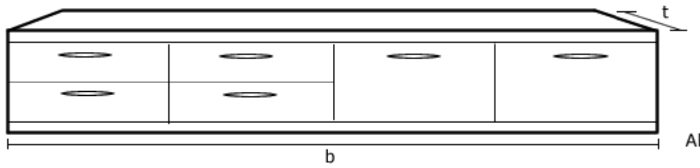

Abb.2

Teilaufgabe f (4 BE)

Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 die Breite b des Möbelstücks möglichst genau. Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung der Geraden k die Tiefe t des Möbelstücks und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Teilaufgabe g (5 BE)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Fenster bei seiner Drehung am Möbelstück anstoßen kann.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1\,|-2\,|-3)$, $B(3\,|-1\,|-2)$ und $C(1\,|-3\,|-1)$ sowie die Ebenenschar $E_k:\ (2+4k)\cdot x_1+(2+k)\cdot x_2+(k-1)\cdot x_3+3=0$ mit $k\in\mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 1a (7 BE)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die das Dreieck enthält, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $F:\ x_1-2x_2-2x_3-9=0$]

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass jede Ebene der Schar E_k senkrecht zu F steht und den Punkt C enthält.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Begründen Sie, dass die Gerade $s:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, die Schnittgerade aller Ebenen der Schar ist.

Teilaufgabe 1d (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene W, bezüglich der die Punkte A und B symmetrisch liegen, in Normalenform. Zeigen Sie, dass W die Gerade s enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_k gehört.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Berechnen Sie den Abstand der Geraden AB und s.

Teilaufgabe 2a (6 BE)

Zeigen Sie, dass der Punkt A in der Scharebene E_0 und der Punkt B in der Scharebene E_{-1} liegt.
Das Lot auf E_0 in A und das Lot auf E_{-1} in B schneiden sich im Punkt P. Ermitteln Sie die Koordinaten von P.

[Teilergebnis: $P(1\,|\,0\,|-4)$]

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Es gibt zwei Punkte auf der Geraden CP, die von P den Abstand $\sqrt{2}$ haben; Q sei derjenige von beiden, der nicht auf der Strecke $[CP]$ liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q.

[Ergebnis: $Q(1\,|\,1\,|-5)$]

Teilaufgabe 2c (6 BE)

Rotiert das Dreieck AQC um die Seite $[CQ]$, so entsteht ein Doppelkegel. Berechnen Sie dessen Volumen.

Teilaufgabe 1. (6 BE)

Gegeben sind zwei Ebenen mit den Gleichungen $E_1 : x + 2z = 1$ und $E_2 : y + 3z = 1$.
Bestimmen Sie die Menge ihrer gemeinsamen Punkte und beschreiben Sie die besondere Lage der beiden Ebenen.

Durch die 3x3-Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind zwei lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Menge der Punkte, die bei der durch A definierten Abbildung auf sich selbst abgebildet werden (Menge der Fixpunkte) und beschreiben Sie diese geometrisch.
Zeigen Sie, dass diese Punkte auch bei der durch B definierten Abbildung Fixpunkte sind.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ermitteln Sie alle Punkte, die durch die Matrix A auf den Ursprung abgebildet werden. Beschreiben Sie diese Punktmenge geometrisch.
Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der hier ermittelten Punktmenge und der Schnittmenge der beiden Ebenen aus Aufgabe 1.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Untersuchen Sie, ob A eine Inverse besitzt. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.

Eine 3x3-Matrix M beschreibt eine Projektion im $\mathbb{R}^3$, wenn gilt $M^2 = M$.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass A eine Projektion beschreibt, und werten Sie in diesem Zusammenhang die Ergebnisse aus den Aufgaben 2.1 und 2.2 aus.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Die 3x3-Matrix C besitze eine Inverse und habe die Eigenschaft $C^2 = C$.
Beweisen Sie, dass C die Einheitsmatrix ist und deuten Sie die Beweisschritte geometrisch.

Durch die Gleichung $3t \cdot x + 4t \cdot y + 5 \cdot z = 15t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Schar von Ebenen E_t gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (12 BE)

Berechnen Sie den Parameter t so, dass die Ebene E_t durch den Punkt $(2|1|1)$ verläuft. Geben Sie die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen (Spurpunkte) an. Zeichnen Sie die Spurpunkte sowie ihre Verbindungsstrecken (Spurdreieck).

Teilaufgabe 1.2

Berechnen Sie im Spurdreieck der Ebene E_1 den Innenwinkel an der Ecke auf der z-Achse.

Teilaufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass zwei der Spurpunkte aus Aufgabe 1.1 auch Spurpunkte jeder Ebene der Schar sind. Beschreiben Sie die Lage der Ebenen der Schar.

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Bestimmen Sie die Werte von t, für die die Ebenen der Schar vom Koordinatenursprung den Abstand 1 LE haben.

Durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich definiert.

Teilaufgabe 3.1 (12 BE)

Zeigen Sie, dass die durch M definierte lineare Abbildung folgende Eigenschaften besitzt:

- Alle Punkte der Geraden $g : \overrightarrow{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, werden auf den Ursprung abgebildet.
- Alle Punkte der Ebene $F : 3x + 4y + 5z = 0$ (F liegt parallel zu E_1) werden auf sich selbst abgebildet.

Teilaufgabe 3.2

Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Zeilen (1) bis (4).

Erklären Sie, welche Eigenschaften die durch M definierte lineare Abbildung besitzt.

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{e}, \vec{p}$ mit:

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \overrightarrow{0P}$ mit $P \in F$

und ein beliebiger Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(1) $\vec{x} = a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

(2) $M \cdot \vec{x} = M \cdot (a \cdot \vec{e} + b \cdot \vec{p}) = a \cdot M \cdot \vec{e} + b \cdot M \cdot \vec{p}$

(3) $= a \cdot \vec{o} + b \cdot \vec{p}$

(4) $= b \cdot \vec{p}$