Abitur Bayern 2011 G9 LK Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Nullstelle von f und geben Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs an.

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E\,(x_E\,|\,y_E)$ sowie das Krümmungsverhalten von G_f.

[Teilergebnis: $x_E = \frac{2}{e}$]

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Geben Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 0$ an. Berechnen Sie $f(3)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Die Einschränkung von f auf das Intervall $]0; x_E]$ besitzt die Umkehrfunktion g_1, die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_E; +\infty[$ die Umkehrfunktion g_2.

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Die Graphen von f und g_2 haben den Punkt $S\,(x_S\,|\,y_S)$ gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von S. Zeichnen Sie die Graphen von g_1 und g_2 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.

[Teilergebnis: $x_S = 2\sqrt{e}$]

Teilaufgabe 1e (4 BE)

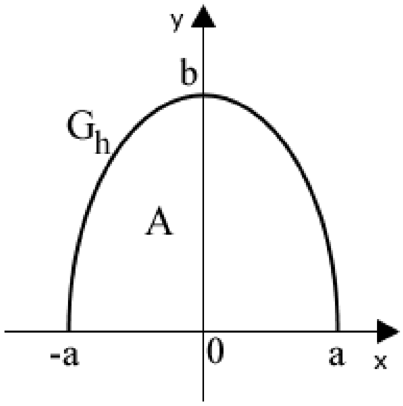
Ermitteln Sie den Term einer Stammfunktion F von f.

[mögliches Ergebnis: $F(X) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2$]

Teilaufgabe 1f (5 BE)

Die Graphen von f, g_1 und g_2 bilden, ergänzt durch den Koordinatenursprung, den Rand eines endlichen Flächenstücks. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Der Graph G_h der in $[-a;a]$ definierten Funktion h ist eine halbe Ellipse, die die y-Achse im Punkt $(0\,|\,b)$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück des Inhalts A einschließt (a, $b \in \mathbb{R}^+$; siehe Abbildung). Der Funktionsterm von h wird im Folgenden nicht benötigt.



Teilaufgabe 2a (4 BE)

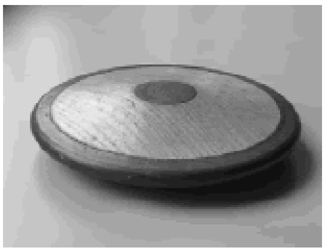
Weisen Sie nach, dass für jede reelle Zahl r die Beziehung

$$\pi \int_{-a}^{a} (h(x)+r)^2\, dx - \pi \int_{-a}^{a} (-h(x)+r)^2\, dx = 2\pi r \cdot 2A$$

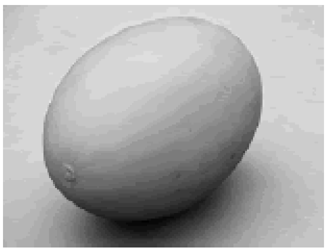
gilt, indem Sie die linke Seite der Gleichung geeignet umformen.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Geben Sie an, wie die Graphen der in $[-a;a]$ definierten Funktionen $h_1 : x \mapsto h(x)+r$ und $h_2 : x \mapsto -h(x)+r$ aus G_h hervorgehen.
Durch den Term auf der linken Seite der Gleichung aus Teilaufgabe 2a wird für $r > b$ das Volumen eines Rotationskörpers beschrieben. Für welchen der abgebildeten Gegenstände stellt dieser Rotationskörper bei passender Wahl von a und b ein geeignetes Modell dar? Begründen Sie Ihre Antwort.


Diskus


Donut


Melone