

Abitur Bayern 2011 G8 Infinitesimalrechnung II

Teil 1

Teilaufgabe 1 (5 BE)

Skizzieren Sie den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion $f : x \mapsto 4 - x^2$.

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt.

Teilaufgabe 2 (4 BE)

Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ an und bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion von f , deren Graph den Punkt $P(1 \mid 4)$ enthält.

Betrachtet wird die Funktion $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Geben Sie die Nullstellen von f an.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie den Grenzwert von f für $x \rightarrow +\infty$ an.

Teilaufgabe 3c (2 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitung von f .

Teilaufgabe 4 (3 BE)

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Teil 2

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (10 BE)

Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f . Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E | y_E)$ von G_f .

$$(zur\ Kontrolle: x_E = 2 \cdot \ln 3 ; f''(x) = 1,5 \cdot e^{-0,5x})$$

Teilaufgabe 1b (3 BE)

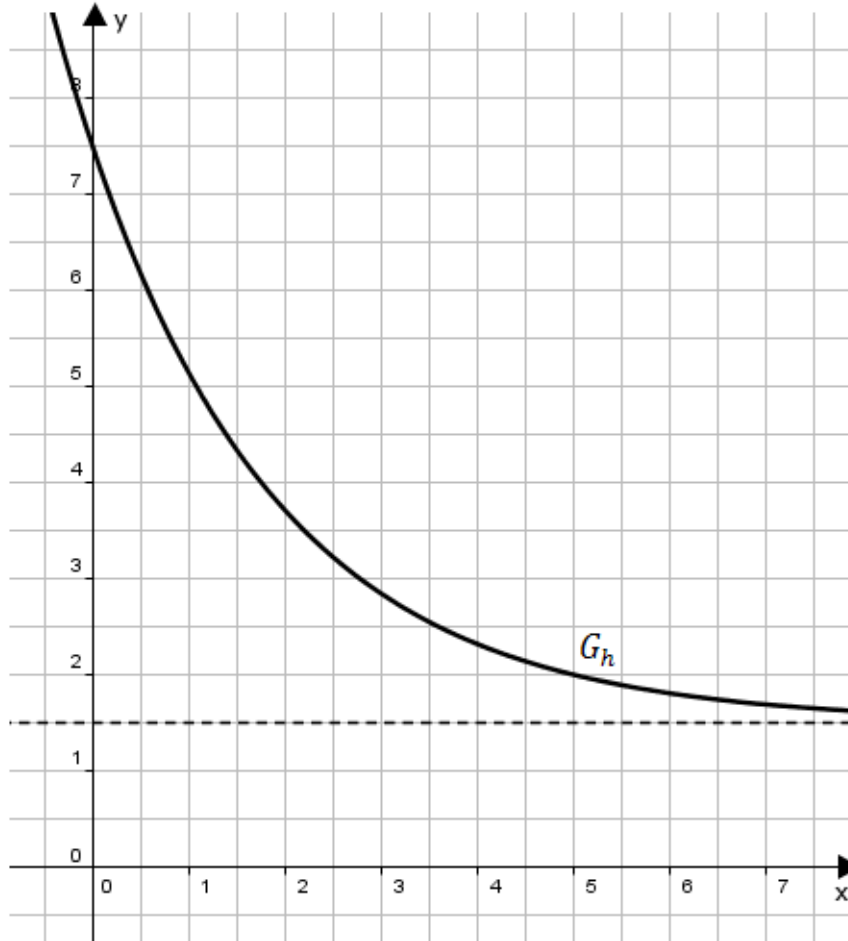
Geben Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$ an. Machen Sie plausibel, dass G_f für $x \rightarrow +\infty$ die Gerade mit der Gleichung $y = x$ als schräge Asymptote besitzt.

Teilaufgabe 1c (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(0 | 6)$.
Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet anzulegendes Koordinatensystem.

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $h : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5$.

Die Abbildung zeigt den in \mathbb{R} streng monoton fallenden Graphen G_h von h sowie dessen Asymptote, die durch die Gleichung $y = 1,5$ gegeben ist.



Teilaufgabe 2a (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_h aus dem Graphen der in \mathbb{R} definierten natürlichen Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ hervorgeht.

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion h modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffausstoßes einer Maschine. Dabei ist x die seit dem Start der Maschine vergangene Zeit in Minuten und $h(x)$ die momentane Schadstoffausstoßrate in Milligramm pro Minute.

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Geben Sie in diesem Sachzusammenhang die Bedeutung des Monotonieverhaltens von G_h sowie des Grenzwerts von h für $x \rightarrow +\infty$ an.

Teilaufgabe 2c (6 BE)

Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h , die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ einschließen. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} - a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge \mathbb{R} .

Teilaufgabe 3a (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen der Schar die y -Achse im selben Punkt schneiden und in \mathbb{R} streng monoton fallend sind. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = -\infty$ gilt.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Aus den Ergebnissen der Aufgabe 3a ergibt sich, dass jede Funktion der Schar genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie für diese Nullstelle in Abhängigkeit von a einen Näherungswert x_1 , indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durchführen.