Abitur Bayern 2011 G8 Infinitesimalrechnung I

Teil 1

Teilaufgabe 1 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{2x+3}{4x+5}$ mit maximaler Definitionsmenge D.
Geben Sie D an und ermitteln Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für die Ableitung f' von f.

Teilaufgabe 2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f: x \mapsto x \cdot \ln x$ ist.
Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.

Teilaufgabe 3 (5 BE)

Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von 6,1 Milliarden zu Beginn des Jahres 2000 auf 6,9 Milliarden zu Beginn des Jahres 2010. Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form
$N(x) = N_0 \cdot e^{k\cdot(x-2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist.
Bestimmen Sie N_0 und k.

Betrachtet wird die Aussage $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0$.

Teilaufgabe 4a (3 BE)

Machen Sie ohne Rechnung anhand einer sorgfältigen Skizze plausibel, dass die Aussage wahr ist.

Teilaufgabe 4b (3 BE)

Weisen Sie mithilfe einer Stammfunktion die Gültigkeit der Aussage durch Rechnung nach.

Teil 2

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$ mit Definitionsmenge D_f. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f, einen beliebigen Punkt $Q(x \mid f(x))$ auf G_f sowie den Punkt $P(1{,}5 \mid 0)$ auf der x-Achse.

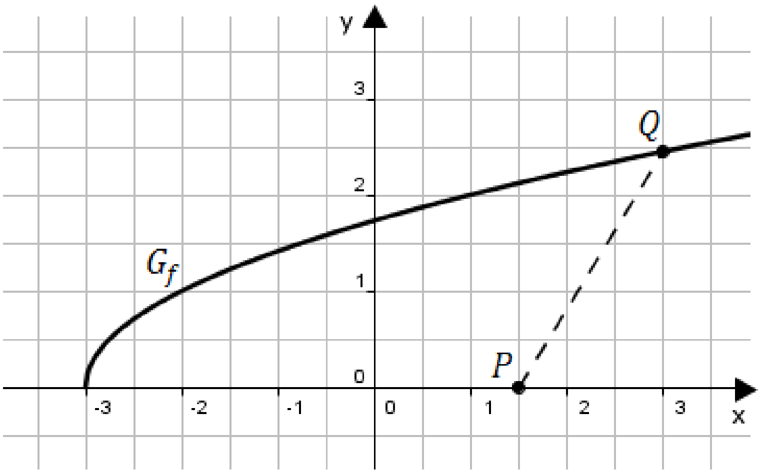

Abb. 1

Teilaufgabe 1a (2 BE)

Begründen Sie, dass $D_f = [-3; +\infty[$ die maximale Definitionsmenge von f ist. Wie geht G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervor?

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass fur die Entfernung $d(x)$ des Punkts $Q(x \mid f(x))$ vom Punkt $P(1{,}5 \mid 0)$ gilt: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5{,}25}$.

Teilaufgabe 1c (7 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten desjenigen Graphenpunkts $Q_E(x_E \mid y_E)$, der von P den kleinsten Abstand hat. Tragen Sie Q_E in Abbildung 1 ein.

(*zur Kontrolle:* $x_E = 1$)

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Verbindungsstrecke $[PQ_E]$ und die Tangente an G_f im Punkt Q_E senkrecht zueinander sind.

Teilaufgabe 1e (6 BE)

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f , der x-Achse und der Strecke $[PQ_E]$ begrenzt wird.

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ definierten gebrochenrationalen Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion g hat in $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel;
- G_g verläuft stets oberhalb seiner schrägen Asymptote, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ gegeben ist;
- die einzige Nullstelle von g ist $x = -1$.

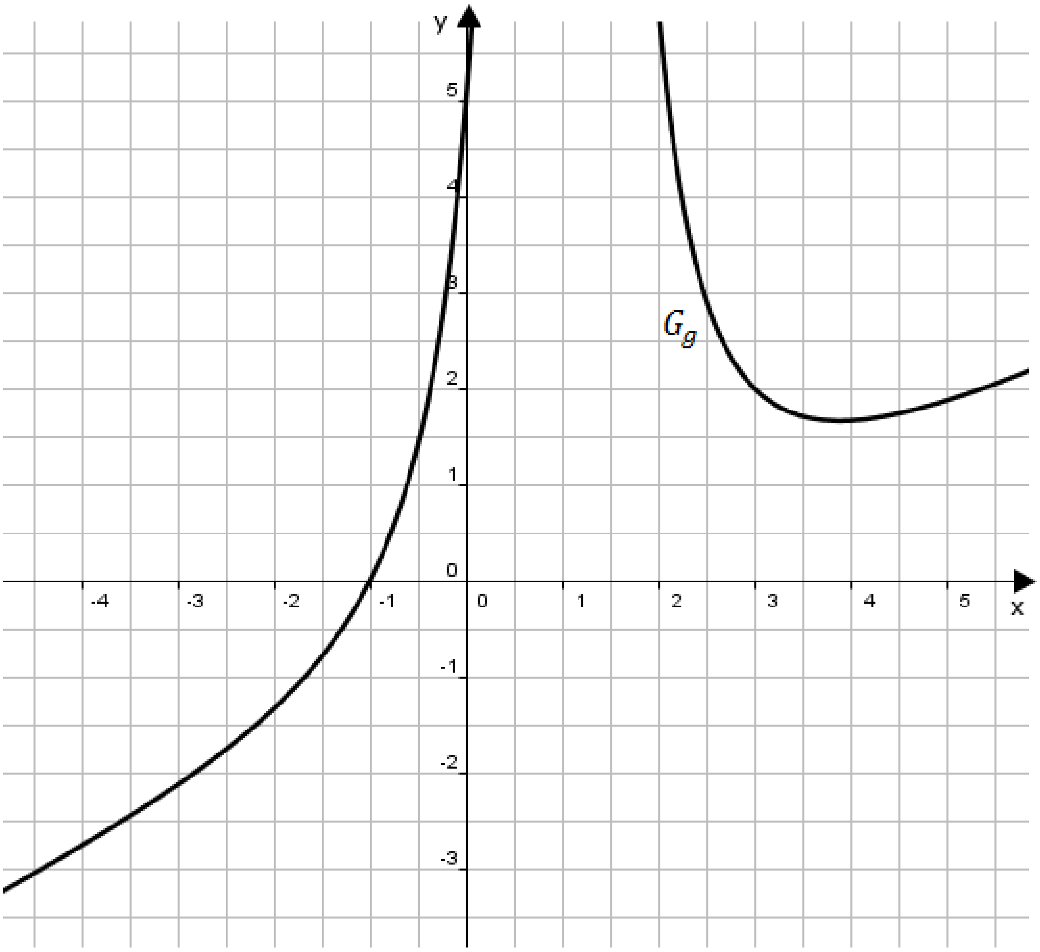

Abb. 2

Teilaufgabe 2a (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 näherungsweise den Wert der Ableitung g' von g an der Stelle $x = -1$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
Aus der Gleichung der schrägen Asymptote ergibt sich unmittelbar das Verhalten der Ableitung g' für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie dieses Verhalten an und skizzieren Sie den Graphen von g' in Abbildung 2.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Die Funktion g hat eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

I $\quad y = x - 1 + \dfrac{a}{(x-1)^2}$ $\qquad$ **II** $\quad y = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{a}{x-1}$ $\qquad$ **III** $\quad y = \dfrac{1}{2}x - 1 + \dfrac{a}{(x-1)^2}$

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.
Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Bestimmen Sie den passenden Wert von a.

Teilaufgabe 2c (5 BE)

Betrachtet wird nun die Funktion h mit $h(x) = \ln(g(x))$. Geben Sie mithilfe des Verlaufs von G_g die maximale Definitionsmenge D_h von h, das Verhalten von h an den Grenzen von D_h sowie einen Näherungswert für die Nullstelle von h an.