Abitur 2012 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Geben Sie zu den Funktionstermen jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie einen Term der Ableitungsfunktion an.

Teilaufgabe Teil 1 1a (2 BE)

$f(x) = \ln(x+3)$

Teilaufgabe Teil 1 1b (3 BE)

$$g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt $(0|5)$.

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Die Funktion g ist an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(2x)$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Geben Sie zwei benachbarte Nullstellen von f an.

Teilaufgabe Teil 1 3b (5 BE)

Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{dx}$.

Warum stimmt der Wert dieses Integrals nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \leq x \leq 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt?

Teilaufgabe Teil 1 4 (4 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $]-\infty;5]$ definierten Funktion f.
Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'.
Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für $f'(0)$, die Nullstelle von f' und das Verhalten von f' für $x \to 5$.

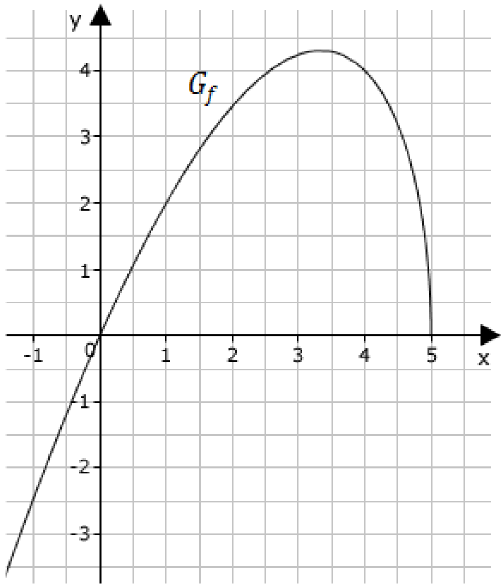

Abb.1

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2e^x}{e^x + 9}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

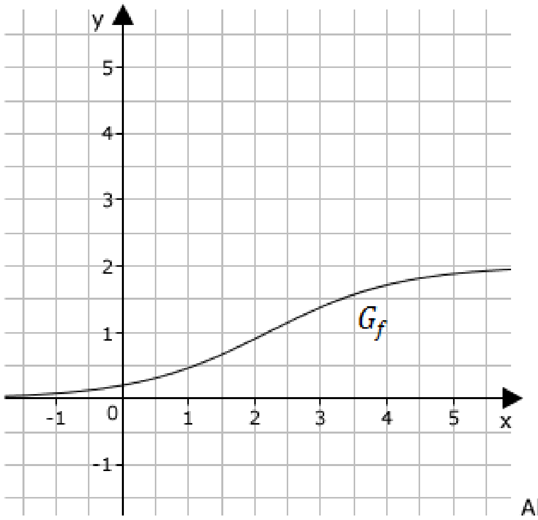

Abb.2

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.

Teilaufgabe Teil 2 1b (2 BE)

Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ gilt.

Teilaufgabe Teil 2 1c (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigt.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{18e^x}{(e^x + 9)^2}$)

Teilaufgabe Teil 2 1d (2 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.
(Ergebnis: $y = 0,18x + 0,2$)

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ einschließt.

Teilaufgabe Teil 2 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass f in $\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in Abbildung 2 ein.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2a bis 2d werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

Teilaufgabe Teil 2 2d (4 BE)

Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe 1d beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $k \in \mathbb{R}^+$ besitzt:

I $\quad y = \dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9}$ $\qquad$ II $\quad y = k \cdot \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9}$ $\qquad$ III $\quad y = \dfrac{2e^{k\,x}}{e^{k\,x}+9}$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

Teilaufgabe Teil 2 2e (4 BE)

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.

Teilaufgabe Teil 2 2f (1 BE)

Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.