Gegeben sind im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(3|0|2)$, $B(1|-2|2)$ und $C(5|-2|2)$ sowie die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.*

(2) *Berechnen Sie bezüglich der Abbildung f die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C' zu den Punkten A, B und C und untersuchen Sie, ob das Bilddreieck $A'B'C'$ ebenfalls rechtwinklig ist.*

(3) *Prüfen Sie, ob die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ bezüglich einer Grundebene des Koordinatensystems eine besondere Lage einnehmen.*

(14 Punkte)

Gegeben sei die Ebene $E^*: 2x_1 - x_2 = 0$ des $\mathbb{R}^3$.

b) *Weisen Sie nach, dass jeder Punkt der Ebene E^* durch die Abbildung f auf sich selbst abgebildet wird.*

(7 Punkte)

c) (1) *Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ Eigenwerte der Abbildung f sind.*

Bestimmen Sie sämtliche Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten.

(2) *Untersuchen Sie, welche Zusammenhänge zwischen der Ebene E^* und den Eigenvektoren der Abbildung f bestehen.*

(14 Punkte)

d) Gegeben sei eine Ebene *E* im $\mathbb{R}^3$, welche den Ursprung enthält.

Eine lineare Abbildung $f_E: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt Spiegelung an der Ebene *E* genau dann, wenn Folgendes gilt:

1. Falls der Punkt *P* in *E* liegt und P' sein Bildpunkt ist, gilt $P = P'$.
2. Falls der Punkt *P* nicht in *E* liegt, sind *P* und P' verschieden und die Gerade PP' ist orthogonal zu *E*.
3. Für die Abstände $d(P;E)$ und $d(P';E)$ der Punkte *P* bzw. P' von der Ebene *E* gilt: $d(P';E) = d(P;E)$.

Begründen Sie, dass die Abbildung f eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist.

(11 Punkte)

e) *Begründen Sie*:

Wenn f_E eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an einer Ebene E, die den Ursprung enthält, ist, dann hat f_E den Eigenwert $\lambda = 1$ mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren.

(4 Punkte)

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Aus $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

Damit ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei A, da das Skalarprodukt der beiden obigen Vektoren gleich 0 ist.

(2) Berechnung der Ortsvektoren der Bildpunkte:

$$\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}8 & 0\\0{,}8 & 0{,}6 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1{,}8\\2{,}4\\2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}8 & 0\\0{,}8 & 0{,}6 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}2\\-0{,}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}8 & 0\\0{,}8 & 0{,}6 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4{,}6\\2{,}8\\2\end{pmatrix}.$$

Aus $\overrightarrow{A'B'}=\begin{pmatrix}-0{,}4\\-2{,}8\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A'C'}=\begin{pmatrix}-2{,}8\\0{,}4\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}=0$.

Damit ist auch das Bilddreieck rechtwinklig.

(3) Die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ liegen in einer Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene mit der Gleichung $x_3=2$.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.]

Modelllösung b)

Aus der gegebenen Ebenengleichung folgt $x_2 = 2x_1$ bei beliebigem x_3.

Damit ergibt sich das Bild sämtlicher Ebenenpunkte unter f durch:

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6x_1 + 1{,}6x_1 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Folglich werden sämtliche Punkte der Ebene E^* durch f auf sich selbst abgebildet.

Modelllösung c)

(1) $\lambda_1 = 1$ ist genau dann ein Eigenwert der Abbildung *f*, wenn das folgende LGS eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ besitzt: $\begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS ist äquivalent zu:

$2x_1 - x_2 = 0$. Die Menge M_1 der Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind also die Ortsvektoren aller Punkte der Ebene E^*, die vom Koordinatenursprung verschieden sind.

$\lambda_2 = -1$ ist genau dann ein Eigenwert der Abbildung *f*, wenn das folgende LGS eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ besitzt: $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS ist äquivalent zu:

$x_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$. Die Menge der Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1$ ist demnach

$$M_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

(2) Es ist $E^* = M_1 \cup \{\vec{0}\}$ nach c) (1).

$M_2 \cup \{\vec{0}\}$ ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Diese ist orthogonal zu der Ebene E^*.

Modelllösung d)

Nach b) bildet f jeden Punkt der Ebene E^* auf sich selbst ab. Damit ist Eigenschaft (1) für E^* erfüllt.

Zu jedem Punkt P, der nicht in E^* liegt, gibt es einen Lotfußpunkt $F_P \neq P$ in der Ebene E^*, so dass $\overrightarrow{F_P P}$ orthogonal zu E^* ist und damit ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ darstellt.

$\overrightarrow{F_P P} \neq \vec{0}$ ist nach c) ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Damit gilt $f\left(\overrightarrow{F_P P}\right) = -\overrightarrow{F_P P}$. Sei P' der Bildpunkt von P bzgl. der Abbildung f. Dann erhält man $f\left(\overrightarrow{F_P P}\right) = f\left(\vec{x}_P - \vec{x}_{F_P}\right) = f\left(\vec{x}_P\right) - f\left(\vec{x}_{F_P}\right) = \vec{x}_{P'} - \vec{x}_{F_P} = \overrightarrow{F_P P'}$, da f durch eine Matrix gegeben ist.

Somit gilt $-\overrightarrow{F_P P} = \overrightarrow{F_P P'}$. Damit sind die Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Insgesamt gesehen ist die Abbildung f eine Spiegelung an der Ebene E^*.

[Alternative Begründungen sind vorstellbar.]

Modelllösung e)

Bei der Spiegelung f_E an der Ebene E, die den Ursprung enthält, wird jeder Richtungsvektor von E auf sich selbst abgebildet. Wählt man zwei nicht kollineare Richtungsvektoren, so folgt:

Der Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

[Andere Formen der Begründung sind hier vorstellbar.]